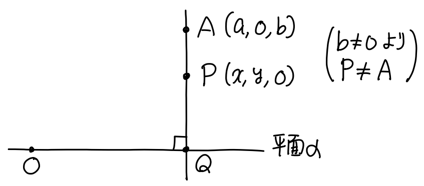
4




(1) O, Q ∈ α と α ⊥ AP より $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QO})\\ &= \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\end{aligned}$$

さらに, Q ∈ (直線AP) より

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = \pm|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|$$

だから,

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO} = \pm|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|$$

よって,

$$(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AQ}|^2 \quad //$$

(2) $\angle OQA = \frac{\pi}{2}$ (Q=A の場合も含む) より

$$OQ^2 + AQ^2 = OA^2$$

であり, 次の同値関係が成り立つ.

$$|\overrightarrow{OQ}| = 1 \iff 1 + AQ^2 = a^2 + b^2$$

ここで, $AP \neq 0$ に注意すると, (1)より

$$\begin{aligned}AQ^2 &= \frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO})^2}{|\overrightarrow{AP}|^2}\\ &= \frac{\{(x-a, y, -b)\cdot(-a, 0, -b)\}^2}{(x-a)^2+y^2+b^2}\\ &= \frac{(-ax+a^2+b^2)^2}{(x-a)^2+y^2+b^2}\end{aligned}$$

だから, さらに変形して

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{OQ}| = 1\\ \iff\ & 1 + \frac{(-ax+a^2+b^2)^2}{(x-a)^2+y^2+b^2} = a^2+b^2\\ \iff\ & (-ax+a^2+b^2)^2 = (a^2+b^2-1)\{(x-a)^2+y^2+b^2\} \ (>0)\\ \iff\ & (b^2-1)x^2 + 2ax + (a^2+b^2-1)y^2 = a^2+b^2 \quad \text{---} ①\end{aligned}$$

◎ $b^2-1 \neq 0$ の場合, ①より

$$(b^2-1)\left(x+\frac{a}{b^2-1}\right)^2 + (a^2+b^2-1)y^2 = \frac{b^2(a^2+b^2-1)}{b^2-1}$$

$a^2+b^2-1>0$ に注意すると

- $b^2-1 = a^2+b^2-1 \ (>0)$ つまり $a=0$ ならば これは

$$x^2+y^2 = \frac{b^2}{b^2-1}$$

と変形でき, $xy$ 平面上の円を表す.

- $b^2-1 \neq a^2+b^2-1$, $b^2-1>0$ ならば これは

$$\underbrace{\frac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}}_{正}\left(x+\frac{a}{b^2-1}\right)^2 + \underbrace{\frac{b^2-1}{b^2}}_{正}y^2 = 1$$

と変形でき, $xy$ 平面上の楕円を表す.

- $b^2-1<0$ ならば これは

$$\underbrace{\frac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}}_{正}\left(x+\frac{a}{b^2-1}\right)^2 - \underbrace{\frac{1-b^2}{b^2}}_{正}y^2 = 1$$

と変形でき, $xy$ 平面上の双曲線を表す.

◎ $b^2-1=0$ の場合,

$a^2+b^2-1>0$ より $a^2>0$ つまり $a\neq 0$ であり, ①より

$$2ax + a^2y^2 = a^2+1$$

$$\therefore\ y^2 = -\frac{2}{a}x + 1 + \frac{1}{a^2}$$

と変形でき, $xy$ 平面上の放物線を表す.

以上より, $xy$ 平面における点 $P(x, y, 0)$ の軌跡は

$$\begin{cases} a=0 & \text{ならば 円 } x^2+y^2 = \dfrac{b^2}{b^2-1}\\ a\neq 0,\ |b|>1 & \text{ならば 楕円 } \dfrac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}\left(x+\dfrac{a}{b^2-1}\right)^2 + \dfrac{b^2-1}{b^2}y^2 = 1\\ 0<|b|<1 & \text{ならば 双曲線 } \dfrac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}\left(x+\dfrac{a}{b^2-1}\right)^2 - \dfrac{1-b^2}{b^2}y^2 = 1\\ |b|=1 & \text{ならば 放物線 } y^2 = -\dfrac{2}{a}x + 1 + \dfrac{1}{a^2}\end{cases} \quad //$$

(※ 設定の $a^2+b^2>1$ により, $|b|\leqq 1$ のとき $a\neq 0$ である)