5

$$b_n = a_1^{n-1}a_1 + a_1^{n-2}a_2 + a_1^{n-3}a_3 + \cdots + a_1^2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1} + a_n$$

(1) $n=1$ の場合

$b_1 = a_1$ であり，$a_1 \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ より b_1 が 7の倍数となることはないから，

$$p_1 = \underline{0}$$

$n=2$ の場合

$$b_2 = a_1 a_1 + a_2 = a_1^2 + a_2$$

(a_1, a_2) の出方は全部で

6^2 通り（同様に確からしい）

あり，このうち b_2 が 7の倍数となるものは表の6通りである．

よって，

$$p_2 = \frac{6}{6^2} = \underline{\frac{1}{6}}$$

$a_1 \backslash a_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31
6	37	38	39	40	41	42

表1：b_2 の値

(2) さいころを十分な回数だけ投げるものとしたときに，k回目に出た目を改めて a_k として考える．

$$b_{n+1} = a_1^n a_1 + a_1^{n-1}a_2 + a_1^{n-2}a_3 + \cdots + a_1^2 a_{n-1} + a_1 a_n + a_{n+1}$$
$$= a_1\left(a_1^{n-1}a_1 + a_1^{n-2}a_2 + a_1^{n-3}a_3 + \cdots + a_1 a_{n-1} + a_n\right) + a_{n+1}$$
$$= a_1 b_n + a_{n+1}$$

これより

$$b_{n+1} = a_1 b_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(ア) b_n が 7の倍数のとき

$a_1 b_n$ は7の倍数，$a_{n+1} \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ だから

b_{n+1} が 7の倍数になることはない．

(イ) b_n が 7の倍数でないとき

$a_1 \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ より，$a_1 b_n$ は 7の倍数でなく，

b_{n+1} が 7の倍数になる ような a_{n+1} は

$a_1 b_n$を7で割った余り	1	2	3	4	5	6
a_{n+1}	6	5	4	3	2	1

$a_1 b_n$を7で割った余りとは無関係に 1つだけとれる．

(ア),(イ)より，b_{n+1} が 7の倍数になるのは

b_n が 7の倍数でなく，

かつ a_{n+1} を(イ)の表のように適切に選ぶ場合

だから，

$$p_{n+1} = (1 - p_n) \times \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ p_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{7}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

これより

$$p_n - \frac{1}{7} = \left(p_1 - \frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

であり，$p_1 = 0$ と併せて

$$p_n = \underline{\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$