阪大理系学部　入試問題

2023年

$\boxed{1}$　n を 2 以上の自然数とする．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\left(a_n - \log 2\right)$$

(配点率 20 %)

$\boxed{2}$　平面上の 3 点 O，A，B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1 \quad かつ \quad \left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1)　$\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ を求めよ．

(2)　平面上の点 P が

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right| \leqq \frac{1}{3} \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

(配点率 20 %)

$\boxed{3}$　P を座標平面上の点とし，点 P の座標を (a, b) とする．$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする．$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

(配点率 20 %)

$\boxed{4}$　a，b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする．座標平面の点 $\mathrm{A}(a, 0, b)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ y\ 0)$ をとる．点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする．

(1)　$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

(配点率 20 %)

$\boxed{5}$　1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k}a_k$$

により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする．

(1)　p_1，p_2 を求めよ．

(2)　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(配点率 20 %)