2

$1 \leqq k \leqq n^2$ のとき　$1 \leqq \sqrt{k} \leqq n$　より

$[\sqrt{k}]$ のとり得る値は　$1, 2, \cdots, n$ である.

$[\sqrt{k}] = n$ となる k は $k = n^2$ のみであり, また

$m \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ の各 m に対し $[\sqrt{k}] = m$ となる k は

$m \leqq \sqrt{k} < m+1$　つまり　$m^2 \leqq k < (m+1)^2$　より

$k = m^2, m^2+1, m^2+2, \cdots, m^2+2m$　の $2m+1$ 個

である.

よって,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} 2^{[\sqrt{k}]}$$

$$= 2^n + \sum_{m=1}^{n-1} 2^m \times (2m+1)$$

($n=1$ の場合はこの部分を 0 とする)

ここで, $n \geqq 2$ の場合について $S = \sum_{m=1}^{n-1} 2^m \times (2m+1)$ とおくと

$$\begin{array}{rrl} & S = & 3 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-1)2^{n-1} \\ -) & 2S = & \phantom{3 \cdot 2^1 +{}} 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-3)2^{n-1} + (2n-1)2^n \\ \hline & -S = & 3 \cdot 2^1 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1)2^n \end{array}$$

($n=2$ の場合はこの部分を 0 とする)

$$= 6 + 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{2^{n-2}-1}{2-1} - (2n-1)2^n$$

($n=2$ の場合も成り立つ)

$$= -(2n-3)2^n - 2$$

$$\therefore S = (2n-3)2^n + 2$$

よって,

$$b_n = 2^n + (2n-3)2^n + 2$$

($n=1$ の場合も成り立つ)

$$= \underline{(2n-2)2^n + 2}$$