3

(1) 1, α, β が三角形の3辺の長さとなれるための条件は

$$|\alpha-\beta| < 1 < \alpha+\beta$$

であり，α, β が実数であるとき，これは次と同値である．

$$\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} < 1 < \alpha+\beta \text{ --------- ①}$$

である．

2次方程式 $x^2-ax+b=0$ が実数解 α, β をもつことから，

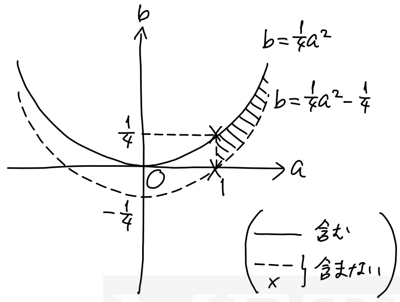
$$\begin{cases} (\text{判別式}) > 0 \text{ より } a^2-4b>0 & \text{---- ②} \\ \text{解と係数の関係より } \alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b & \text{-- ③} \end{cases}$$

①に③を代入すると $\sqrt{a^2-4b} < 1 < a$

②と併せて，a, b が満たすべき条件は

$$\begin{cases} a>1 \\ 0 \leqq a^2-4b<1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a>1 \\ \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4} < b \leqq \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

よって，求める (a, b) の範囲を図示すると次のとおり．



(2) ③より

$$\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{b+1}{a^2}$$

(1)より a の変域は $a>1$ であり，

この範囲内で a を固定するごとに b の変域は

$$\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4} < b \leqq \frac{1}{4}a^2$$

だから，$\frac{b+1}{a}$ の変域は

$$\frac{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}\right)+1}{a^2} < b \leqq \frac{\frac{1}{4}a^2+1}{a^2}$$

$$\therefore \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{3}{4a^2}}_{=f(a)\text{とおく}} < b \leqq \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{a^2}}_{=g(a)\text{とおく}}$$

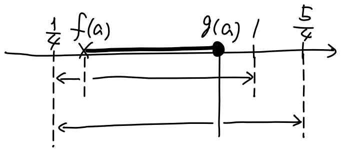
ここで，$a>1$ において

a^2 の変域は $a^2>1$

$\frac{1}{a^2}$ の変域は $0<\frac{1}{a^2}<1$ だから

$f(a)$ の変域は $\frac{1}{4} < f(a) < 1$

$g(a)$ の変域は $\frac{1}{4} < g(a) < \frac{5}{4}$



よって求める範囲は

$$\frac{1}{4} < \frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2} < \frac{5}{4}$$