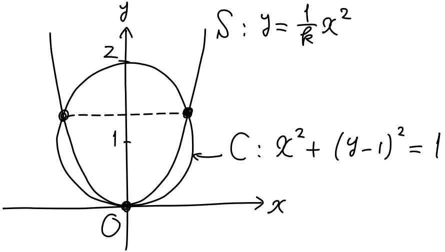
$\boxed{4}$

(1)



CとSが共有点をちょうど3個持つのは

CとSの共有点のy座標が2つあり,

1つが$y=0$, もう1つが$0<y<2$にある

ときである.

CとSの式を連立し, xを消去すると

$$ky + (y-1)^2 = 1$$

$$\therefore\ y^2 + (k-2)y = 0$$

$$\therefore\ y\{y-(2-k)\} = 0$$

$$\therefore\ y = 0,\ 2-k$$

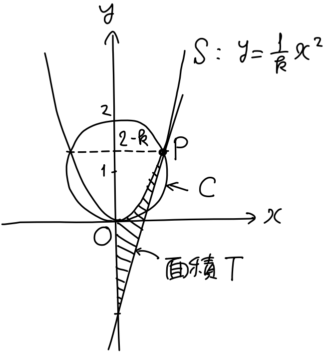
これより, kが満たすべき条件は

$$0 < 2-k < 2 \qquad \therefore 0 < k < 2$$

よって, 求めるkの範囲は

$\underline{0 < k < 2}$ //

(2)



(1)より P の y 座標は $2-k$ であり,
さらに設定より P の x 座標は

$$\begin{cases} 2-k=\frac{1}{k}x^2 \\ x>0 \end{cases} \quad \text{より} \quad x=\sqrt{k(2-k)}$$

また, $\left(\frac{1}{k}x^2\right)'=\frac{2}{k}x$ より P における S の接線の方程式は

$$y=\frac{2}{k}\sqrt{k(2-k)}\left\{x-\sqrt{k(2-k)}\right\}+2-k$$

$$\therefore y=\frac{2}{k}\sqrt{k(2-k)}\,x-(2-k)$$

これより, 接線と S と y 軸で囲まれる領域の面積を T とすると

$$T=\int_0^{\sqrt{k(2-k)}}\left[\frac{1}{k}x^2-\left\{\frac{2}{k}\sqrt{k(2-k)}\,x-(2-k)\right\}\right]dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{k(2-k)}}\frac{1}{k}\left\{x-\sqrt{k(2-k)}\right\}^2dx$$

$$=\frac{1}{3k}\left[x-\sqrt{k(2-k)}\right]_0^{\sqrt{k(2-k)}}$$

$$=\frac{1}{3k}\left\{\sqrt{k(2-k)}\right\}^3$$

$$=\frac{1}{3}(2-k)\sqrt{k(2-k)}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{k(2-k)^3}$$

ここで $2-k=s$ とおくと, (1)より s の変域は $0<s<2$
であり, $k(2-k)^3=f(s)$ とおくと

$$f(s)=(2-s)s^3=2s^3-s^4$$

$$f'(s)=6s^2-4s^3$$
$$=4s^2\left(\frac{3}{2}-s\right)$$

s	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(s)$		$+$		$-$	
$f(s)$		↗		↘	

右表より, $f(s)$ は $s=\frac{3}{2}$
のとき最大となる.

よって, 求める最大値は

$$T=\frac{1}{3}\sqrt{f\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$