

5

a, b, c の出方は全部で $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ 通りあり、
 これはどれも等確率 $\frac{1}{6^3}$ で起こる。

このうちの

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0 \quad \text{----- ①}$$

を満たすものが N 通りあるとする。

① を変形すると

$$\int_{a-3}^{a+3} \{x^2 - (b+c)x + bc\} dx = 0$$

$$\therefore \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + bcx \right]_{a-3}^{a+3} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \{ (a+3)^3 - (a-3)^3 \} - \frac{b+c}{2} \{ (a+3)^2 - (a-3)^2 \} + bc \{ (a+3) - (a-3) \} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} (18a^2 + 54) - \frac{b+c}{2} \cdot 12a + bc \cdot 6 = 0$$

$$\therefore a^2 + 3 - (b+c)a + bc = 0$$

$$\therefore bc - ab - ac + a^2 + 3 = 0$$

$$\therefore (b-a)(c-a) = -3$$

$$a=1 \text{ の場合 } (b-1)(c-1) = -3$$

$b-1 \geq 0, c-1 \geq 0$ より左辺は 0 以上だから、これは不適。

$$a=2 \text{ の場合 } (b-2)(c-2) = -3$$

$b-2, c-2 \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ に注意すると

$$(b-2, c-2) = (-1, 3), (3, -1) \therefore (b, c) = (1, 5), (5, 1)$$

$$a=3 \text{ の場合 } (b-3)(c-3) = -3$$

$b-3, c-3 \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ に注意すると

$$(b-3, c-3) = (-1, 3), (3, -1) \therefore (b, c) = (2, 6), (6, 2)$$

$$a=4 \text{ の場合 } (b-4)(c-4) = -3$$

$b-4, c-4 \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ に注意すると

$$(b-4, c-4) = (-3, 1), (1, -3) \therefore (b, c) = (1, 5), (5, 1)$$

$$a=5 \text{ の場合 } (b-5)(c-5) = -3$$

$b-5, c-5 \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ に注意すると

$$(b-5, c-5) = (-3, 1), (1, -3) \therefore (b, c) = (2, 6), (6, 2)$$

$$a=6 \text{ の場合 } (b-6)(c-6) = -3$$

$b-6 \leq 0, c-6 \leq 0$ より左辺は 0 以上だから、これは不適。

このより

$$N = 0 + 2 + 2 + 2 + 2 + 0 = 8 \text{ (通り)}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{6^3} \times N = \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}$$