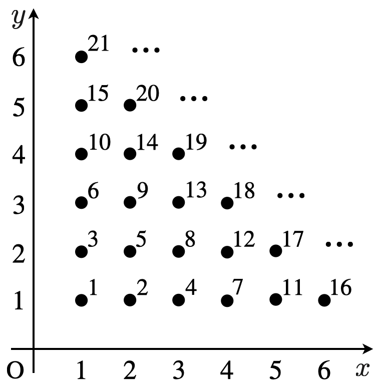
一橋大学　前期　入試問題

2023年

1	n を 2 以上 20 以下の整数，k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする。 $${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2\left({}_{n}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{k+1}\right)$$ が成り立つような整数の組 (n, k) を求めよ。
2	a を正の実数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2 : y = 3ax^2 - \dfrac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ。
3	原点を O とする座標空間内に 3 点 A$(-3, 2, 0)$，B$(1, 5, 0)$，C$(4, 5, 1)$ がある。P は $\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right\rvert \leqq 36$ を満たす点である。4 点 O，A，B，P が同一平面上にないとき，四面体 OABP の体積の最大値を求めよ。
4	xy 平面上で，x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に，下の図のような番号をつける。点 (m, n) につけた番号を $f(m, n)$ とする。たとえば，$f(1, 1) = 1$，$f(3, 4) = 19$ である。  (1) $f(m, n) + f(m+1, n+1) = 2f(m, n+1)$ が成り立つことを示せ。 (2) $f(m, n) + f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m+1, n+1) = 2023$ となるような整数の組 (m, n) を求めよ。
5	A，B，C の 3 人が，A, B, C, A, B, C, A, … という順番にさいころを投げ，最初に 1 を出した人を勝ちとする。だれかが 1 を出すか，全員が n 回ずつ投げたら，ゲームを終了する。A, B, C が勝つ確率 P_{A}，P_{B}，P_{C} をそれぞれ求めよ。