京大理系学部　入試問題

2015年

$\boxed{1}$ (30 点)

2 つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

$\boxed{2}$ (30 点)

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のもの面積を求めよ．

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である．

(b) 半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう．

$\boxed{3}$ (35 点)

(1) a を実数とするとき，$(a, 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) $a_1=1$ として，$n=1, 2, \cdots$ について，$(a_n, 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ (35 点)

一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

$\boxed{5}$ (35 点)

a, b, c, d, e を正の実数として整式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=dx+e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

$\boxed{6}$ (35 点)

2 つの関数を

$$f_0(x)=\frac{x}{2}, \qquad f_1(x)=\frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1, 2, \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．