2016年

$\boxed{1}$ (30 点)

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta) = (1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ.

$\boxed{2}$ (30 点)

素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ.

$\boxed{3}$ (35 点)

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ.

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る.

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう.

$\boxed{4}$ (35 点)

xyz 空間において，平面 $y = z$ の中で

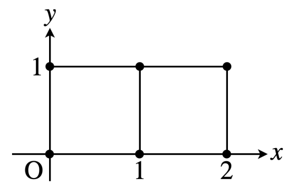
$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \qquad 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 D を考える．ただし a は 1 より大きい定数とする.

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

$\boxed{5}$ (35 点)

xy 平面上の 6 個の点 (0, 0)，(0, 1)，(1, 0)，(1, 1)，(2, 0)，(2, 1) が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する.



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる点のいずれかに，等しい確率で移動する.

例えば，X が (2, 0) にいるときは，(1, 0)，(2, 1) のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．また X が (1, 1) にいるときは，(0, 1)，(1, 0)，(2, 1) のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．時刻 0 で動点 X が O = (0, 0) から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ．ただし n は 0 以上の整数とする.

$\boxed{6}$ (35 点)

複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し，次の条件を考える.

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる.

(ロ) $f(x)$ の係数 a，b の少なくとも一方は虚数である.

この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ.