京大文系学部　入試問題

2018年

1	a は正の実数とし，座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線 $$C_1 : y = \lvert x^2 - 1 \rvert, \qquad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$ の共有点であり，$\lvert x_0 \rvert \neq 1$ を満たすとする．C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ． (30 点)
2	1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする． (1) 線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ． (2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ． (30 点)
3	$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ． (30 点)
4	四面体 ABCD は AC = BD，AD = BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする． (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ． (2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2つの部分に分ける．このとき，2つの部分の体積は等しいことを示せ． (30 点)
5	整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする． (i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し，その球に書かれている整数を k とする． (ii) $k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す． (iii) $k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す． 整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする．例えば X_1 は常に 1 である．以下 $n \geqq 2$ として次の問に答えよ． (1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ． (2) $X_n \leqq n+1$ である確率を求めよ． (30 点)