京大理系学部　入試問題

2020年

$\boxed{1}$

　a, b は実数で，$a > 0$ とする．z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

は３つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a, b と $(*)$ の３つの解を求めよ．

(30 点)

$\boxed{2}$

　p を正の整数とする．α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の２つの解で，$|\alpha| > 1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n + \beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ．

(30 点)

$\boxed{3}$

　k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径１の球面上の４点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = k.$$

　このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

(35 点)

$\boxed{4}$

　正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \qquad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は３で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．

　m, n は整数で，次の条件を満たすとする．

　(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

　(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

　(iii) n は３で割り切れない．

　このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m, n) = B\big(f(m, n)\big)$$

の最大値を求めよ．また，$A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ．

(35 点)

$\boxed{5}$

　縦４個，横４個のマス目のそれぞれに１，２，３，４の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が１回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．右図はこのような入れ方の１例である．

(35 点)

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

$\boxed{6}$

　x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに１回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに１回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

(35 点)