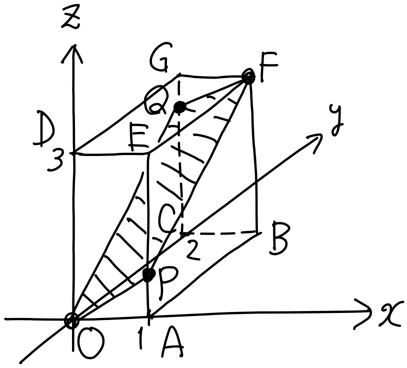
文 $\boxed{4}$



変数 t, u を $P(1, 0, t)$, $Q(0, 2, u)$ で定める.
ただし, P, Q がそれぞれ辺 AE, CG 上にあることから

$$0 \leqq t \leqq 3, \quad 0 \leqq u \leqq 3 \quad \text{------------ ①}$$

であり, O, P, F, Q が同一平面上にあることから, ある実数 α, β を用いて $\overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ}$

つまり $(1, 2, 3) = \alpha(1, 0, t) + \beta(0, 2, u)$

つまり $\begin{cases} 1 = \alpha \\ 2 = 2\beta \\ 3 = \alpha t + \beta u \end{cases}$

つまり $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ t + u = 3$

と表されるから, ①と併せて (t, u) の変域は

$$u = 3 - t,\ 0 \leqq t \leqq 3,\ 0 \leqq 3 - t \leqq 3$$

$$\therefore u = 3 - t,\ 0 \leqq t \leqq 3$$

このとき $\overrightarrow{QF} = (1, 0, 3-u)$

$= (1, 0, t)$

$= \overrightarrow{OP}$

より 平行四辺形 OPFQ が成立し,

$\overrightarrow{OP} = (1, 0, t)$, $\overrightarrow{OQ} = (0, 2, u)$

$|\overrightarrow{OP}|^2 = 1 + t^2$, $|\overrightarrow{OQ}|^2 = 4 + u^2$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = tu$

を用いると その面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} \\ &= \sqrt{(1+t^2)(4+u^2) - (tu)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4t^2 + u^2} \\ &= \sqrt{4 + 4t^2 + (3-t)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 6t + 13} \\ &= \sqrt{5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}} \end{aligned}$$

よって, $t = \frac{3}{5}$ のとき S は最小値 $\sqrt{\frac{56}{5}} = \underline{\frac{2\sqrt{70}}{5}}$ をとり,

このとき, $\underline{P\left(1, 0, \frac{3}{5}\right)}$ さらに $u = \frac{12}{5}$ より $\underline{Q\left(0, 2, \frac{12}{5}\right)}$