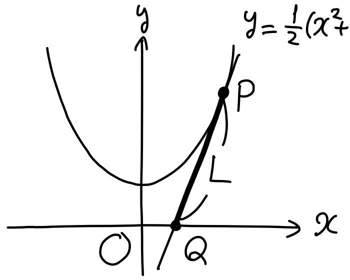
理 $\boxed{2}$

$y=\frac{1}{2}(x^2+1)\quad (y'=x)$



変数 t を $P(t, \frac{1}{2}(t^2+1))$ で定める.

Pにおける接線 $y=t(x-t)+\frac{1}{2}(t^2+1)$ が x軸と交わることと, 設定の y軸に関する対称性より

tの変域は $t>0$

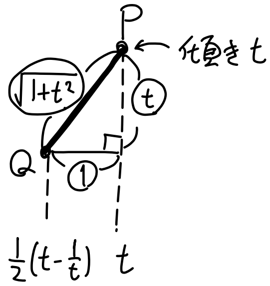
としてよい.

このとき, 交点 Q の x座標は

$$0=t(x-t)+\frac{1}{2}(t^2+1)$$

を解いて

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$



これより

$$L=\left\{t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}\times\sqrt{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\sqrt{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

ここで,

$$\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{t^2}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{t}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}t\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\left\{-(1+t^2)+3t^2\right\}$$

$$=\underbrace{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}}_{\text{正}}\times\left(t^2-\frac{1}{2}\right)$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(∞)
$\frac{dL}{dt}$		$-$		$+$	
L		↘		↗	

表より $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき Lは最小となり,

$$(L\text{の最小値})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$