理 $\boxed{3}$

この無限級数の部分和を

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6} \quad (N = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおくと，無限級数の定義より，求めるものは $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ の極限値である．

数列 $\{S_{6M-1}\}$ $(M = 1, 2, 3, \cdots)$ は

$$\begin{cases} \text{初項 } \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ \qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{-1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \qquad = \frac{70 + 15\sqrt{3}}{64} \\ \text{公比 } -\left(\frac{1}{2}\right)^6 = -\frac{1}{64} \end{cases}$$

の等比数列だから

$$S_{6M-1} = \frac{70 + 15\sqrt{3}}{64} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{64}\right)^M}{1 - \left(-\frac{1}{64}\right)}$$

$$= \frac{14 + 3\sqrt{3}}{13} \left\{1 - \left(-\frac{1}{64}\right)^M\right\}.$$

これより

$$S_{6M-1} \xrightarrow[M\to\infty]{} \frac{14 + 3\sqrt{3}}{13} \quad (= \alpha \text{ とおく}).$$

さらに，$M \to \infty$ のとき

$$\begin{cases} S_{6M} = \underbrace{S_{6M-1}}_{\to\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{6M} \cos M\pi}_{\to 0} \to \alpha \\ S_{6M+1} = \underbrace{S_{6M}}_{\to\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{6M+1} \cos\left(M\pi + \frac{\pi}{6}\right)}_{\to 0} \to \alpha \\ S_{6M+2} = \underbrace{S_{6M+1}}_{\to\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{6M+2} \cos\left(M\pi + \frac{2\pi}{6}\right)}_{\to 0} \to \alpha \\ S_{6M+3} = \underbrace{S_{6M+2}}_{\to\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{6M+3} \cos\left(M\pi + \frac{3\pi}{6}\right)}_{\to 0} \to \alpha \\ S_{6M+4} = \underbrace{S_{6M+3}}_{\to\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{6M+4} \cos\left(M\pi + \frac{4\pi}{6}\right)}_{\to 0} \to \alpha \end{cases}$$

だから数列 $\{S_N\}$ は α に収束する．

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6} = \lim_{N\to\infty} S_N = \alpha = \underline{\frac{14 + 3\sqrt{3}}{13}} \text{ //.}$$