理 4

$y=\log(1+\cos x)$ について,

$$y'=\frac{-\sin x}{1+\cos x}$$

$$\therefore \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-s}{1+c}\right)^2} \quad \left(\begin{array}{l} c=\cos x \\ s=\sin x \end{array}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{(1+c)^2+s^2}{(1+c)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2+2c}{(1+c)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1+c}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}} \quad \left(1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\ より\right)$$

$$=\frac{1}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ においては $0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{4}$ であり $\cos\frac{x}{2}>0$ だから

$$\sqrt{1+(y')^2}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$$

よって, 求める長さLは曲線の長さの公式により

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}}{1-\sin^2\frac{x}{2}}dx$$

ここで, $\sin\frac{x}{2}=t$ によって積分変数を置き換えると

$$\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0\to\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}, \quad \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=dt \quad より$$

$$L=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2}{1-t^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\Big[-\log|1-t|+\log|1+t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\underline{2\log(\sqrt{2}+1)}$$