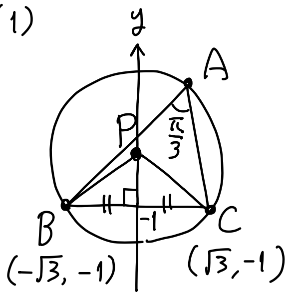
理 5

(1)



$\triangle ABC$の外心Pは
$\triangle ABC$の外接円の中心だから

① Pから直線BCに下ろした垂線は辺BCを二等分する
② PCは外接円の半径である

を満たす。

①より Pは y軸上にある。

②より、正弦定理から $2\times PC=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ $\therefore PC=2$

また、∠BACが鋭角であることから、

Pは直線BCに関してAと同じ側にある。

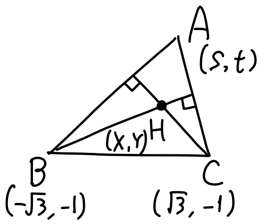
以上より、Pは原点 $\underline{(0,0)}$ である。

(2) 設定より、Aは原点を中心とする半径2の円の周のうち $y>0$ の部分を動くから、$A(s,t)$ と表示すると s,t は

$$s^2+t^2=4,\ s\text{は実数},\ t>0 \quad \text{-----} ①$$

を満たしながら変化する。

$\triangle ABC$の垂心を $H(X,Y)$ とおくと、



垂心の定義より

$$\begin{cases}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$$

だから

$$\begin{cases}(X+\sqrt{3})(\sqrt{3}-s)+(Y+1)(-1-t)=0\\ (X-\sqrt{3})(-\sqrt{3}-s)+(Y+1)(-1-t)=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\sqrt{3}X-\sqrt{3}s=0\\ -Xs+3+(Y+1)(-1-t)=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}X=s & \text{----------} ②\\ (t+1)Y=-s^2-t+2 & \text{--} ③\end{cases}$$

ここで、①より $s^2=4-t^2$ であり、③に代入すると

$$(t+1)Y=t^2-t-2$$

$$\therefore (t+1)Y=(t+1)(t-2)$$

$t>0$ より $t+1\neq 0$ だから、$Y=t-2$ -----③'

②,③'より、$(X,Y)=(s,t)+(0,-2)$ であり、点Hは点Pを y軸方向に -2 だけ平行移動した位置にある。

よって、求めるHの軌跡は

$\underline{\text{半円 } x^2+(y+2)^2=4,\ y>-2}$