

# 理 6

## 問1 対偶命題

「 $n$ が素数でないならば $3^n - 2^n$ は素数でない」  
を示せばよい。

$n$ が素数でないとき、 $n$ が2以上の整数であるという  
設定から、 $n$ は合成数であり

$$n = ab \quad (a, b \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

と表すことができる。

このとき

$$\begin{aligned} 3^n - 2^n &= 3^{ab} - 2^{ab} \\ &= (3^a)^b - (2^a)^b \\ &= \underbrace{(3^a - 2^a)}_{=A \text{ とおく}} \underbrace{\{ (3^a)^{b-1} + (3^a)^{b-2} \cdot 2^a + \dots + (2^a)^{b-1} \}}_{=B \text{ とおく}} \end{aligned}$$

と表すことができ、さらに

$$A = (3 - 2)(3^{a-1} + 3^{a-2} \cdot 2 + \dots + 2^{a-1})$$

$$= 3^{a-1} + 3^{a-2} \cdot 2 + \dots + 2^{a-1}$$

$$\geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \text{ 回}}$$

$$= a$$

$$\geq 2,$$

$$B = (3^a)^{b-1} + (3^a)^{b-2} \cdot 2^a + \dots + (2^a)^{b-1}$$

$$\geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{b \text{ 回}}$$

$$= b$$

$$\geq 2$$

だから、 $3^n - 2^n$  は合成数である。

よって、示せた。 //