

理 6 (つづき)

問2

曲線  $y = f(x)$  の点  $(t, f(t))$  における接線

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

が原点  $(0, 0)$  を通るために  $t$  が満たすべき条件は

$$0 = f'(t)(0 - t) + f(t)$$

$$\text{つまり } f(t) - tf'(t) = 0 \text{ ----- ①}$$

であり, このを満たす実数  $t$  の存在を示せばよい.

これを背理法で示す.

仮に①を満たす実数  $t$  が存在しなかったとすると,

$f(t) - tf'(t)$  は連続関数であることから

(ア) すべての実数  $t$  に対して  $f(t) - tf'(t) > 0$

または

(イ) すべての実数  $t$  に対して  $f(t) - tf'(t) < 0$

のいずれかが成り立つ.

(ア) の場合, 少なくとも  $t > 0$  ではつねに

$$\frac{f(t) - tf'(t)}{t^2} > 0 \text{ より } \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}' > 0$$

だから  $\frac{f(t)}{t}$  は  $t > 0$  において増加し,

$$a > 1 \text{ より } \frac{f(a)}{a} > \frac{f(1)}{1} \text{ となるが,}$$

$f(a) = a f(1)$  を代入すると  $f(1) > f(1)$  となり不合理.

(イ) の場合も同様にして

$\frac{f(t)}{t}$  が  $t < 0$  において減少し,

$$a > 1 \text{ より } \frac{f(a)}{a} < \frac{f(1)}{1} \text{ となるが,}$$

$f(a) = a f(1)$  を代入すると  $f(1) < f(1)$  となり不合理.

いずれにしても矛盾が生じるため, ①を満たす実数

$t$  が存在しないという仮定は誤りであり, 示せた. //