

## 2022年

1	<p><math>5.4 &lt; \log_4 2022 &lt; 5.5</math>であることを示せ。ただし、<math>0.301 &lt; \log_{10} 2 &lt; 0.3011</math>であることは用いてよい。</p> <p style="text-align: right;">(30 点)</p>
2	<p>箱の中に 1 から <math>n</math> までの番号がついた <math>n</math> 枚の札がある。ただし <math>n \geq 5</math> とし、同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し、札の番号を小さい順に <math>X, Y, Z</math> とする。このとき、<math>Y - X \geq 2</math> かつ <math>Z - Y \geq 2</math> となる確率を求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(35 点)</p>
3	<p><math>n</math> を自然数とする。3 つの整数 <math>n^2 + 2, n^4 + 2, n^6 + 2</math> の最大公約数 <math>A_n</math> を求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(35 点)</p>
4	<p>四面体 <math>OABC</math> が</p> $OA = 4, \quad OB = AB = BC = 3, \quad OC = AC = 2\sqrt{3}$ <p>を満たしているとする。P を辺 <math>BC</math> 上の点とし、<math>\triangle OAP</math> の重心を <math>G</math> とする。このとき、次の各問に答えよ。</p> <p>(1) <math>\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}</math> を示せ。</p> <p>(2) P が辺 <math>BC</math> 上を動くとき、<math>PG</math> の最小値を求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(30 点)</p>
5	<p>曲線 <math>C : y = \cos^3 x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)</math>, <math>x</math> 軸および <math>y</math> 軸で囲まれる図形の面積を <math>S</math> とする。<math>0 &lt; t &lt; \frac{\pi}{2}</math> とし、<math>C</math> 上の点 <math>Q(t, \cos^3 t)</math> と原点 <math>O</math>, および <math>P(t, 0)</math>, <math>R(0, \cos^3 t)</math> を頂点にもつ長方形 <math>OPQR</math> の面積を <math>f(t)</math> とする。このとき、次の各問に答えよ。</p> <p>(1) <math>S</math> を求めよ。</p> <p>(2) <math>f(t)</math> は最大値をただ 1 つの <math>t</math> でとることを示せ。そのときの <math>t</math> を <math>\alpha</math> とすると、<math>f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}</math> であることを示せ。</p> <p>(3) <math>\frac{f(\alpha)}{S} &lt; \frac{9}{16}</math> を示せ。</p> <p style="text-align: right;">(35 点)</p>
6	<p>数列 <math>\{x_n\}, \{y_n\}</math> を次の式</p> $x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$ $y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ <p>により定める。このとき、数列 <math>\{x_n - y_n\}</math> の一般項を求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(35 点)</p>