

2023年

1

(30 点)

次の各問に答えよ.

問1 n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げるとき, 出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ.

問2 次の式の分母を有理化し, 分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

2

(30 点)

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さ と 線分 RD の長さの比 $OR:RD$ を求めよ.

3

(30 点)

(1) $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ.

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さが 1.15 より大きいか否かを理由を付けて判定せよ.

4

(30 点)

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている.

$$a_1 = 3, \quad a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ である. このとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

5

(30 点)

整式 $f(x)$ が恒等式

$$f(x) + \int_{-1}^1 (x-y)^2 f(y) dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$$

を満たすとき, $f(x)$ を求めよ.