

2023年

1

(35 点)

次の各問に答えよ.

問1 定積分 $\int_1^4 \sqrt{x} \log(x^2) dx$ の値を求めよ.問2 整式 $x^{2023} - 1$ を整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの余りを求めよ.

2

(30 点)

空間内の4点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さ と 線分 RD の長さの比 $OR:RD$ を求めよ.

3

(30 点)

n を自然数とする. 1個のさいころを n 回投げ, 出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とし, n 個の数の積 $X_1 X_2 \dots X_n$ を Y とする.

(1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ.(2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ.

4

(35 点)

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ただし, e は自然対数の底であり, その値は $e = 2.71\dots$ である.

5

(35 点)

O を原点とする xyz 空間において点 P と点 Q は次の3つの条件 (a), (b), (c) を満たしている.

(a) 点 P は x 軸上にある.(b) 点 Q は yz 平面上にある.(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である.

点 P と点 Q が条件 (a), (b), (c) を満たしながらくまなく動くとき, 線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ.

6

(35 点)

p を 3 以上の素数とする. また, θ を実数とする.

(1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ.

(2) $\cos \theta = \frac{1}{p}$ のとき, $\theta = \frac{m}{n} \cdot \pi$ となるような正の整数 m, n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ.