九大　数学IIB型　入試問題

2023年

〔1〕	a を $0<a<9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を，次のように定める。 $C: y=\lvert (x-3)(x+3)\rvert,\qquad \ell: y=a$ 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ となる a の値を求めよ。
〔2〕	xy 平面上の曲線 $C: y=x^3-x$ を考える。実数 $t>0$ に対して，曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(t, t^3-t)$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と直線 $y=-x$ の交点を B，三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。 (1)　点 B の座標を t を用いて表せ。 (2)　$\theta=\angle\mathrm{OBA}$ とする。$\sin^2\theta$ を t を用いて表せ。 (3) $f(t)=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}$ とする。$t>0$ のとき，$f(t)$ を最小にする t の値と $f(t)$ の最小値を求めよ。
〔3〕	点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{m}=(a, c),\ \vec{n}=(b, d)$ に対して，$D=ad-bc$ とおく。以下の問いに答えよ。 (1)　$\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D=0$ であることを示せ。 以下，$D \neq 0$ であるとする。 (2)　座標平面上のベクトル $\vec{v}$，$\vec{w}$ で $\vec{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1,\ \vec{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ を満たすものを求めよ。 (3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して $r\vec{m}+s\vec{n}=\vec{q}$ を満たす実数 r と s を $\vec{q}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。
〔4〕	ω を $x^3=1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて，次の規則で 4 つの複素数 $0, 1, \omega, \omega^2$ を並べていくことにより，複素数の列 $z_1, z_2, z_3,$ …… を定める。 ・ $z_1=0$ とする。 ・ z_k まで定まったとき，さいころを投げて，出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。 ○ $z_k=0$ のとき，$z_{k+1}=\omega^t$ とする。 ○ $z_k\neq 0$，$t=1, 2$ のとき，$z_{k+1}=0$ とする。 ○ $z_k\neq 0$，$t=3$ のとき，$z_{k+1}=\omega z_k$ とする。 ○ $z_k\neq 0$，$t=4$ のとき，$z_{k+1}=\overline{\omega z_k}$ とする。 ○ $z_k\neq 0$，$t=5$ のとき，$z_{k+1}=z_k$ とする。 ○ $z_k\neq 0$，$t=6$ のとき，$z_{k+1}=\overline{z_k}$ とする。 ここで複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。 (1)　$\omega^2=\overline{\omega}$ となることを示せ。 (2)　$z_n=0$ となる確率を n の式で表せ。 (3)　$z_3=1$，$z_3=\omega$，$z_3=\omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。 (4)　$z_n=1$ となる確率を n の式で表せ。