九大　数学III型　入試問題

2023年

〔1〕	以下の問いに答えよ。 (1) 4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。 (2) 複素数平面上の△ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とする。 $$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$ が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。
〔2〕	α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が $$a_1=\alpha, \quad a_{n+1}=\lvert a_n-1\rvert+a_n-1 \ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$ で定めれらるとき，以下の問いに答えよ。 (1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。 (2) $\alpha>2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。 (3) $1<\alpha<\frac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。 (4) $\frac{3}{2} \leqq \alpha<2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。
〔3〕	点 O を原点とする座標平面上の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $$\overrightarrow{m}=(a, c), \ \overrightarrow{n}=(b, d)$$ に対して，$D=ad-bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して，次の条件を考える。 条件 I　$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。 条件 II　$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。 以下の問いに答えよ。 (1) 条件 I がすべての $\overrightarrow{q}$ に対して成り立つとする。$D \neq 0$ であることを示せ。 以下，$D \neq 0$ であるとする。 (2) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ で $$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}=1, \ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$$ を満たすものを求めよ。 (3) さらに a, b, c, d が整数であるとし，x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。D のとりうる値をすべて求めよ。

〔4〕　以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

　三角関数 $\cos x$，$\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A)　すべての x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B)　すべての x, y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C)　$f(0)\neq 0$

(D)　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

①条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ がわかる。以上のことから ②$f(x)$，$g(x)$ はすべての x の値で微分可能で，$f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ が成立することが示される。③上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ であることが示される。

　さらに，a, b を実数で $b\neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)’ $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)’ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるかを考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

　とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x)=\boxed{\text{ア}}$，$g(x)=\boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1)　下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2)　下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3)　下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4)　下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B)　すべての x, y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D)　$p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄 $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ。

〔5〕　xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=t+2\sin^2 t,\qquad y=t+\sin t\qquad (0<t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2)　曲線 C のうち $y\leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。