

文①

(1) $C_1: y = x^2$ について, $y' = 2x$ より

点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

$$\therefore \underline{y = 2tx - t^2}$$

(2) (1)で求めた接線が C_2 に接するための t の条件は

$$x \text{ の二次方程式 } 2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$$

$$\text{つまり } x^2 - 2(2a - t)x - t^2 + 4a^2 - 4a^4 = 0$$

が重解をもつことであり, (判別式) = 0 とし

$$(2a - t)^2 - (-t^2 + 4a^2 - 4a^4) = 0$$

$$\therefore 2t^2 - 4at + 4a^4 = 0$$

$$\therefore t^2 - 2at + 2a^4 = 0 \text{ ----- ①}$$

C_1 と C_2 が異なる共通接線をもつことは,

①を満たす異なる実数 t が 2 つあることと同値だから,

(判別式) > 0 とし

$$a^2 - 2a^4 > 0$$

$$\therefore a^2(a^2 - \frac{1}{2}) < 0$$

$$\therefore 0 < a^2 < \frac{1}{2}$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと, 求める a の範囲は

$$\underline{0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(3) ①の解を α, β とすると, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = 2a^4$$

であり,

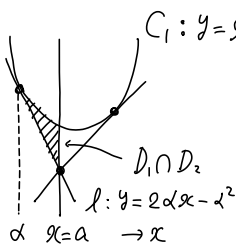
$$l: y = 2\alpha x - \alpha^2$$

$$l': y = 2\beta x - \beta^2$$

とおけるから, これらを連立して解くと, その交点の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta \right) \text{ つまり } \underline{(a, 2a^4)}$$

(4)



①の2解のうち小さい方を α としよ, $\alpha = a - \sqrt{a^2 - 2a^4}$

$$\alpha = a - \sqrt{a^2 - 2a^4}$$

D_1 と D_2 の共通部分 $D_1 \cap D_2$

(左図のとおり).

よって, その面積は

$$S(a) = \int_{\alpha}^a \{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^a (x - \alpha)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}(a - \alpha)^3$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}(\sqrt{a^2 - 2a^4})^3}}$$