文 $\boxed{2}$

(1) $\alpha\beta\gamma = \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$

$= \dfrac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 2}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 5}}$ (底の変換公式より)

$= 1$

$\therefore \alpha\beta\gamma = 1$ // ---------- ①

(2) $\alpha = \log_2 3 = \log_2 \sqrt{9} > \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} = \delta$

$\beta = \log_3 5 = \log_3 \sqrt{25} < \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} = \delta$

$\beta = \log_3 5 > \log_3 3 = 1$

$\gamma = \log_5 2 < \log_5 5 = 1$

よって, $\gamma < 1 < \beta < \delta < \alpha$ であり,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$を 小さい順に並べると

$\underline{\gamma,\ \beta,\ \delta,\ \alpha}$ //

(3) $p = \alpha + \beta + \gamma$ ---------- ②

$q = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ ---------- ③

①, ②, ③ から, 3次方程式の解と係数の関係により,

α, β, γ は 3次方程式

$x^3 - px^2 + qx - 1 = 0$

の解である.

$g(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$ とおくと,

$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$

$= -\{(-x)^3 - p(-x)^2 + q(-x) - 1\}$

$= -g(-x)$

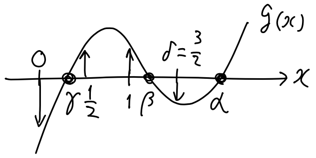
であり,

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = -g(\frac{1}{2}) \\ f(-1) = -g(1) \\ f(-\frac{3}{2}) = -g(\frac{3}{2}) \end{cases}$$ ---------- ④

ここで, (2) より得られる α, β, γ の配置 および

$\gamma = \log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

であることから, $y = g(x)$ のグラフの概形は次のとおり.



グラフより $g(\frac{1}{2}) > 0$, $g(1) > 0$, $g(\frac{3}{2}) < 0$ だから, ④と併せて

$\underline{f(-\frac{1}{2}) < 0,\ f(-1) < 0,\ f(-\frac{3}{2}) > 0}$ //