理 1

(1) $C_1 : y=x^2$ について, $y'=2x$ より
点(t, t^2)における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2$$

$$\therefore\ y=2tx-t^2$$

(2) (1)で求めた接線がC_2に接するためのtの条件は
xの2次方程式 $2tx-t^2=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$
つまり $x^2-2(2a-t)x-t^2+4a^2-4a^4=0$
が重解をもつことであり, (判別式)$=0$ として

$$(2a-t)^2-(-t^2+4a^2-4a^4)=0$$

$$\therefore\ 2t^2-4at+4a^4=0$$

$$\therefore\ t^2-2at+2a^4=0 \quad \text{-------------- ①}$$

C_1とC_2が異なる共通接線をもつことは,
①を満たす異なる実数tが2つあることと同値だから,
(判別式)>0 として

$$a^2-2a^4>0$$

$$\therefore\ a^2\left(a^2-\frac{1}{2}\right)<0$$

$$\therefore\ 0<a^2<\frac{1}{2}$$

$a>0$に注意してこれを解くと, 求めるaの範囲は

$$0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3) ①の解をα, βとすると, 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2a,\quad \alpha\beta=2a^4$$

であり,

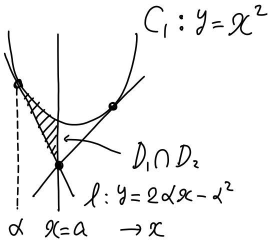
$$l : y=2\alpha x-\alpha^2$$

$$l' : y=2\beta x-\beta^2$$

とおけるから, これらを連立して解くと, その交点の座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right) \quad \text{つまり} \quad (a,\ 2a^4)$$

(4)



①の2解のうち小さい方をαとしてもよく,

$$\alpha=a-\sqrt{a^2-2a^4}$$

D_1とD_2の共通部分$D_1\cap D_2$は左図のとおり.

よって, その面積は

$$S(a)=\int_\alpha^a\left\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\right\}dx$$

$$=\int_\alpha^a (x-\alpha)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}(a-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2-2a^4}\right)^3$$

(5) $S(a)=\frac{1}{3}\left\{-2\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\right\}^{\frac{3}{2}}$

これより, $S(a)$は $a^2-\frac{1}{4}=0$ つまり $a=\frac{1}{2}\ (>0)$ のとき最大となり, 求める最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{96}$$