

理 2

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \alpha\beta\gamma &= \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 \\
 &= \frac{\log_3 3}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_5 5}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_5 2} \quad (\text{底の変換公式より}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma = 1 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \alpha &= \log_2 3 = \log_2 \sqrt{9} > \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} = d \\
 \beta &= \log_3 5 = \log_3 \sqrt{25} < \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} = d \\
 \beta &= \log_3 5 > \log_3 3 = 1 \\
 \gamma &= \log_5 2 < \log_5 5 = 1
 \end{aligned}$$

よって,  $\gamma < 1 < \beta < d < \alpha$  であり,

$\alpha, \beta, \gamma, d \in$  小さい順に並べると

$$\underline{\gamma, \beta, d, \alpha}$$

$$(3) \quad p = \alpha + \beta + \gamma \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

$$q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{d\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{d\beta\gamma} = d\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \text{---} \quad \textcircled{3}$$

①, ②, ③ から, 3次方程式の解と係数の関係により,

$\alpha, \beta, \gamma$  は 3次方程式

$$\underline{x^3 - px^2 + qx - 1 = 0}$$

の解である.

$$g(x) = \underline{x^3 - px^2 + qx - 1} \quad \text{とおくと,}$$

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$$

$$= -\{(-x)^3 - p(-x)^2 + q(-x) - 1\}$$

$$= -g(-x)$$

であり,

$$\begin{cases}
 f(-\frac{1}{2}) = -g(\frac{1}{2}) \\
 f(-1) = -g(1) \\
 f(-\frac{3}{2}) = -g(\frac{3}{2})
 \end{cases}$$

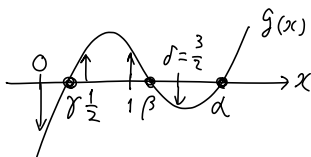


$$\text{-----} \quad \textcircled{4}$$

ここで, (2) より 得られる  $\alpha, \beta, \gamma$  の配値 および

$$\gamma = \log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

であることから,  $y = g(x)$  の3つの根の形は次のとおり.



したがって  $g(\frac{1}{2}) > 0, g(1) > 0, g(\frac{3}{2}) < 0$  である, ④ と併せて

$$\underline{f(-\frac{1}{2}) < 0, f(-1) < 0, f(-\frac{3}{2}) > 0}$$