理 $\boxed{4}$

(1) 求められていることは

$$\begin{cases} x = a \\ y = 3\left[a+\frac{1}{2}\right] - 2a \end{cases} \quad (0 \leqq a < 1)$$

で表される点 (x, y) の軌跡，つまり

曲線 $y = 3\left[x+\frac{1}{2}\right] - 2x \quad (0 \leqq x < 1)$

の図示である.

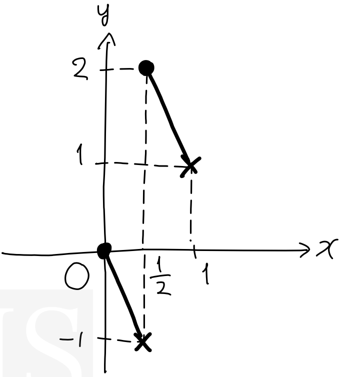
$0 \leqq x < \frac{1}{2}$ では $\frac{1}{2} \leqq x + \frac{1}{2} < 1$ より $\left[x+\frac{1}{2}\right] = 0$ だから

$$y = 3 \cdot 0 - 2x = -2x$$

$\frac{1}{2} \leqq x < 1$ では $1 \leqq x + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ より $\left[x+\frac{1}{2}\right] = 1$ だから

$$y = 3 \cdot 1 - 2x = -2x + 3$$

よって，求める軌跡は次のとおり.



METIS

(2) $a_n - [a_n] \geqq \frac{1}{2}$ より $[a_n] + \frac{1}{2} \leqq a_n$ ------ ①

また，$[a_n]$ の定義より $[a_n] \leqq a_n < [a_n] + 1$ ---- ②

①, ② より

$$[a_n] + \frac{1}{2} \leqq a_n < [a_n] + 1$$

$$\therefore [a_n] + 1 \leqq a_n + \frac{1}{2} < [a_n] + \frac{3}{2}$$

これより $\left[a_n + \frac{1}{2}\right] = [a_n] + 1$ であり，

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3([a_n] + 1) - 2a_n \\ &= 3[a_n] + 3 - 2a_n \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3[a_n] + 3 - 3a_n \\ &= 3([a_n] + 1 - a_n) \\ &> 0 \quad (① より) \end{aligned}$$

であり，$a_n < a_{n+1}$. //

(3) $a_n > a_{n+1}$ のとき, $a_n \geqq a_{n+1}$ だから,

(2)の対偶により, $a_n - [a_n] < \frac{1}{2}$

$$\therefore a_n < [a_n] + \frac{1}{2} \quad \text{------------ ③}$$

②, ③ より

$$[a_n] \leqq a_n < [a_n] + \frac{1}{2} \quad \text{------------ ④}$$

$$\therefore [a_n] + \frac{1}{2} \leqq a_n + \frac{1}{2} < [a_n] + 1$$

これより $\left[a_n + \frac{1}{2}\right] = [a_n]$ であり,

$$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n \quad // \quad \text{------------ ⑤}$$

また, ④ より

$$3[a_n] - 2\left([a_n] + \frac{1}{2}\right) < 3[a_n] - 2a_n \leqq 3[a_n] - 2[a_n]$$

$$\therefore [a_n] - 1 < 3[a_n] - 2a_n \leqq [a_n]$$

これと ⑤ より $[a_n] - 1 < a_{n+1} \leqq [a_n]$

ここで, 仮に $a_{n+1} = [a_n]$ だったとすると

② より $a_{n+1} \leqq a_n < a_{n+1} + 1$ となるが,

これは $a_n > a_{n+1}$ の設定に反するので不適.

よって, $[a_n] - 1 < a_{n+1} < [a_n]$ であり,

a_{n+1} 以下の最大の整数は $[a_n] - 1$ だから

$$[a_{n+1}] = [a_n] - 1. \quad //$$

METIS

(4) $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ だから,

(3)を $n = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して用いることができ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots, k-1) & \text{--------- ⑥} \\ [a_{n+1}] = [a_n] - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, k-1) & \text{--------- ⑦} \end{cases}$$

⑦ と $[a_1] = [a] = 0$ ($0 \leqq a < 1$ より) から

有限数列 $\{[a_n]\}$ $(n = 1, 2, \cdots, k)$ は初項 0, 公差 -1 の等差数列だから

$$[a_n] = -n + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, k)$$

⑥に代入すると

$$a_{n+1} = 3(-n+1) - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots, k-1)$$

これが $a_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta = -2(a_n - \alpha n - \beta)$ と変形できる

ような (α, β) を1組見つけると

$$\begin{cases} n: & 2\alpha + \alpha = -3 \\ 定: & 2\beta + \alpha + \beta = 3 \end{cases} \quad として \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases}$$

これより

$$a_{n+1} + (n+1) - \frac{4}{3} = -2\left(a_n + n - \frac{4}{3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots, k-1)$$

であり, 有限数列 $\left\{a_n + n - \frac{4}{3}\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots, k)$ は公比 -2 の等比数列だから

$$a_n + n - \frac{4}{3} = \left(a_1 + 1 - \frac{4}{3}\right)(-2)^{n-1}$$

$a_1 = a$ と併せて

$$a_n = -n + \frac{4}{3} + \left(a - \frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots, k)$$

とくに

$$\underline{a_k = -k + \frac{4}{3} + \left(a - \frac{1}{3}\right)(-2)^{k-1}} \quad //$$