

2021年

1 a を正の実数とする。放物線 $y = x^2$ を C_1 , 放物線 $y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$ を C_2 とする。以下の間に答えよ。

(1) 点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 ℓ, ℓ' を持つような a の範囲を求めよ。ただし C_1 と C_2 の共通接線とは、 C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである。

以下、 a は (2) で求めた範囲にあるとし、 ℓ, ℓ' を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする。

(3) ℓ, ℓ' の交点の座標を求めよ。

(4) C_1 と ℓ, ℓ' で囲まれた領域を D_1 とし、不等式 $x \leq a$ の表す領域を D_2 とする。 D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5) $S(a)$ を (4) の通りとする。 a が (2) で求めた範囲を動くとき、 $S(a)$ の最大値を求めよ。

2 4 つの実数を $\alpha = \log_2 3, \beta = \log_3 5, \gamma = \log_5 2, \delta = \frac{3}{2}$ とおく。以下の間に答えよ。

(1) $\alpha\beta\gamma = 1$ を示せ。

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を小さい順に並べよ。

(3) $p = \alpha + \beta + \gamma, q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ とし、 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ とする。このとき $f\left(-\frac{1}{2}\right), f(-1)$ および $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。

3 1 から 12 までの数字が下の図のように並べて書かれている。以下のルール (a), (b) と (終了条件) を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると最初に (a) を行い、(終了条件) が満たされたならゲームを終了する。そうでなければ (終了条件) が満たされるまで (b) の操作を繰り返す。ただし、(a) と (b) における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。

(a) 1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び、下の図において選んだ数字を丸で囲み、その上に石を置く。

(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び、その数字を丸で囲み、そこに石を移して置く。例えば、石が 6 の位置に置かれているときは、その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7, 8, 9, 10, 12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び、その数字を丸で囲み、そこに石を移して置く。

(終了条件) 5, 9, 11, 12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている。

ゲームの終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする。以下の間に答えよ。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(1) 確率 p_2 を求めよ。

(2) 確率 p_5 と p_{11} を求めよ。

(3) 確率 p_5, p_9, p_{11}, p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ。

4 $0 \leq a < 1$ を満たす実数 a に対し、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

という漸化式で定める。ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。以下の間に答えよ。

(1) a が $0 \leq a < 1$ の範囲を動くとき、点 $(x, y) = (a_1, a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2) $a_n - [a_n] \geq \frac{1}{2}$ ならば、 $a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。

(3) $a_n > a_{n+1}$ ならば、 $a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ。

(4) ある 2 以上の自然数 k に対して、 $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ が成り立つとする。このとき a_k を a の式で表せ。