神大理系学部　入試問題

2017年

1. n を自然数とする．

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく．$3 < \pi < 4$ であることを用いて，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) < 0$ であることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ．

(3) (2) における解を x_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ．

2. n を自然数とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

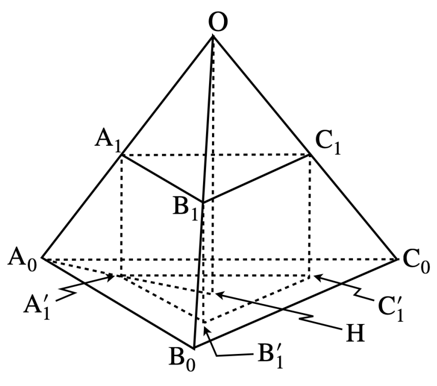
が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ．

3. 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある．図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1'}$, $\mathrm{B_1B_1'}$, $\mathrm{C_1C_1'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1} - \mathrm{A_1'B_1'C_1'}$ は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{A_2'}$, $\mathrm{B_2'}$, $\mathrm{C_2'}$, …… を次にように定める．正四面体 $\mathrm{OA_kB_kC_k}$ において，辺 $\mathrm{OA_k}$ 上の点 $\mathrm{A_{k+1}}$，辺 $\mathrm{OB_k}$ 上の点 $\mathrm{B_{k+1}}$，辺 $\mathrm{OC_k}$ 上の点 $\mathrm{C_{k+1}}$ から平面 $\mathrm{A_kB_kC_k}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_{k+1}A_{k+1}'}$, $\mathrm{B_{k+1}B_{k+1}'}$, $\mathrm{C_{k+1}C_{k+1}'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}} - \mathrm{A_{k+1}'B_{k+1}'C_{k+1}'}$ は正三角柱になるとする．辺 $\mathrm{A_kB_k}$ の長さを a_k とし，三角柱 $\mathrm{A_kB_kC_k} - \mathrm{A_k'B_k'C_k'}$ の体積を V_k とするとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta = \angle\mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ．

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ．



4. $\overrightarrow{v_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,-1,1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る）をふるごとに，出た目が k（$k=1,2,3,4$）のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を 6 以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となる確率を求めよ．

5. r, c, ω は正の定数とする．座標平面上の動点 P は時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,-r)$ にあるとする．点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t), y(t))$ を求めよ．

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1\neq t_2$ ならば $(x(t_1), y(t_1))\neq(x(t_2), y(t_2))$ であるための必要十分条件を r, c, ω を用いて与えよ．