神大理系学部　入試問題

2018年

1.　t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を１辺の長さが１の正四面体とする．辺 OA を $1-t : t$ に内分する点を P，辺 OB を $t : 1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\angle \mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3)　t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle \mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2.　k を２以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　$x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2)　数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$，$x_{n+1} = f(x_n)$（$n = 1, 2, \cdots$）を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3)　(2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

3.　さいころを３回ふって，１回目に出た目の数を a，２回目と３回目に出た目の数の和を b とし，２次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

を考える．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　$(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2)　$(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも１つの解は３以下であることを示せ．

(3)　$(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

4.　整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ３次式で，３次の係数は１，定数項は -3 とする．方程式 $f(x) = 0$ は，１と虚数 α，β を解にもつとし，α の実部は１より大きく，α の虚部は正とする．複素数平面上で α，β，1 が表す点を順に A，B，C とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　α の絶対値を求めよ．

(2)　θ を α の偏角とする．$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積 S を θ を用いて表せ．

(3)　S を最大にする θ（$0 \leqq \theta < 2\pi$）とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ．

5.　座標空間において，O を原点とし，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(1, 1, 0) とする．$\triangle$OAB を直線 OC の周りに１回転してできる回転体を L とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　直線 OC 上にない点 P(x, y, z) から直線 OC におろした垂線を PH とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x，y，z の式で表せ．

(2)　点 P(x, y, z) が L の点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq x + y \leqq 2$$

であることを示せ．

(3)　$1 \leqq a \leqq 2$ とする．L を 平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4)　立体 $\left\{(x, y, z) \,\middle|\, (x, y, z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\right\}$ の体積を求めよ．