神大理系学部　入試問題

2019年

1.	以下の問に答えよ．(配点 30 点) (1) 関数 $$f(x)=\frac{\log x}{x}$$ の $x>0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ． (2) a を $a\neq 1$ をみたす正の実数とする．曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=x^a$（$x>0$）が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする．点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ． (3) a と t を (2) で求めた実数とする．x を $x\neq t$ をみたす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ．
2.	$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert=2$ をみたす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PABの重心を G とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点) (1) $\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right\rvert^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ． (2) $\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ． (3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{AGB}$ の最大値を求めよ．ただし，$0<\angle\mathrm{AGB}<\pi$ とする．
3.	n を２以上の整数とする．２個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点) (1) P_2, P_3, P_4 を求めよ． (2) $n\geqq 36$ のとき，P_n を求めよ． (3) $P_n=\dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ．
4.	次のように 1，3，4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$とする． $$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \cdots$$ すなわち，$a_1=1, a_2=3, a_3=4$ で，４位上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点) (1) S_n を求めよ． (2) $S_n=2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ． (3) どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．
5.	媒介変数表示 $$x=\sin t,\qquad y=(1+\cos t)\sin t\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$ で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点) (1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ． (2) C の凹凸を調べ，C の概形を描け． (3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ．