

# 2020年

<p>1.</p>	<p><math>\alpha</math> は実数とし, <math>f(x)</math> は係数が実数である 3 次式で, 次の条件 (i), (ii) をみたすとする.</p> <p>(i) <math>f(x)</math> の <math>x^3</math> の係数は 1 である</p> <p>(ii) <math>f(x)</math> とその導関数 <math>f'(x)</math> について,</p> $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ <p>が成り立つ.</p> <p>以下の問に答えよ. (配点 30 点)</p> <p>(1) <math>f(x)</math> は <math>(x - \alpha)^2</math> で割り切れることを示せ.</p> <p>(2) <math>f(\alpha + 2) = 0</math> とする. <math>f'(x) = 0</math> かつ <math>x \neq \alpha</math> をみたす <math>x</math> を <math>\alpha</math> を用いて表せ.</p> <p>(3) (2) の条件のもとで <math>\alpha = 0</math> とする. <math>xy</math> 平面上において不等式</p> $y \geq f(x) \text{ かつ } y \geq f'(x) \text{ かつ } y \leq 0$ <p>の表す部分の面積を求めよ.</p>
<p>2.</p>	<p><math>\theta</math> を <math>0 &lt; \theta &lt; \frac{\pi}{2}</math> をみたす実数とし, 原点 <math>O</math>, <math>A(1, 0)</math>, <math>B(\cos 2\theta, \sin 2\theta)</math> を頂点とする <math>\triangle OAB</math> の内接円の中心を <math>P</math> とする. また, <math>\theta</math> がこの範囲を動くときに点 <math>P</math> が描く曲線と線分 <math>OA</math> によって囲まれた部分を <math>D</math> とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)</p> <p>(1) 点 <math>P</math> の座標は <math>\left(1 - \sin \theta, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}\right)</math> で表されることを示せ.</p> <p>(2) <math>D</math> を <math>x</math> 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.</p>
<p>3.</p>	<p>以下の問に答えよ. (配点 30 点)</p> <p>(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.</p> <p>(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.</p> <p>(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ.</p>
<p>4.</p>	<p><math>n</math> を自然数とし, <math>2n\pi \leq x \leq (2n + 1)\pi</math> に対して <math>f(x) = \frac{\sin x}{x}</math> とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)</p> <p>(1) <math>f(x)</math> が最大となる <math>x</math> の値がただ 1 つ存在することを示せ.</p> <p>(2) (1) の <math>x</math> の値を <math>x_n</math> とする. このとき, <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\tan x_n}</math> を求めよ.</p>
<p>5.</p>	<p><math>p</math> を 2 以上の自然数とし, 数列 <math>\{x_n\}</math> は</p> $x_1 = \frac{1}{2p + 1}, \quad x_{n+1} =  2x_n - 1  \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ <p>を満たすとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)</p> <p>(1) <math>p = 3</math> のとき, <math>x_n</math> を求めよ.</p> <p>(2) <math>x_{p+1} = x_1</math> であることを示せ.</p>