

2024年

1. 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定まる。 a_1 は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10x \quad (x \geq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする。 a_{n+1} は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10a_n x \quad (x \geq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{10} a_n$ で定める。以下の問に答えよ。

(配点 25 点)

- (1) a_1 と b_1 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (5) $\frac{a_1 a_2 a_3}{100}$ の値を求めよ。

2. n を自然数とする。以下の問に答えよ。(配点 25 点)

- (1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n で最小のものを求めよ。
- (2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n で最小のものを求めよ。
- (3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる確率を求めよ。

3. a, b, c は実数で、 $a \neq 0$ とする。放物線 C と直線 l_1, l_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$

$$l_1 : y = -3x + 3$$

$$l_2 : y = x + 3$$

で定める。 l_1, l_2 がともに C に接するとき、以下の問に答えよ。(配点 25 点)

- (1) b を求めよ。また c を a を用いて表せ。
- (2) C が x 軸と異なる 2 点で交わる時、 $\frac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) C と l_1 の接点を P , C と l_2 の接点を Q , 放物線 C の頂点を R とする。 a が (2) の条件を満たしながら動くとき、 $\triangle PQR$ の重心 G の軌跡を求めよ。