文1

曲線 $C: y = ax^3 - 2x$ ---- ①
円 $S: x^2 + y^2 = 1$ ---- ②

①を②に代入して整理すると
$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1$$
$$\therefore a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - 1 = 0 \quad \text{------} ③$$

①より，1つの実数 x につき実数 y が1つ対応し，

（①かつ②を満たす実数の組 (x, y) の個数）
＝（③を満たす実数 x の個数）

が成り立つから，

（③を満たす実数 x の個数）＝ 6

となるような a の範囲を求めればよい．

また，$x^2 = t$ とおくと，1つの t につき実数 x は
$$\begin{cases} t > 0 & \text{ならば 2個} \\ t = 0 & \text{ならば 1個} \\ \text{それ以外} & \text{ならば 0個} \end{cases}$$
対応し，異なる t には異なる x が対応するので，
$f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1$ とおくと求めるものは

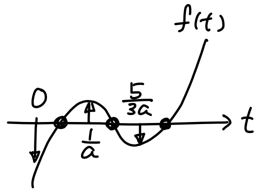
t の3次方程式 $f(t) = 0$ が
異なる正の3解をもつような a の範囲

となる．

$$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5$$
$$= (at - 1)(3at - 5)$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$		$-$		$+$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

← $\left(\begin{array}{l} a > 0 \text{ より} \\ 0 < \frac{1}{a} < \frac{5}{3a} \end{array} \right)$



これより，a が満たすべき条件は
$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f\left(\frac{1}{a}\right) > 0 \\ f\left(\frac{5}{3a}\right) < 0 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} -1 < 0 \\ \frac{2}{a} - 1 > 0 \\ \frac{50}{27a} - 1 < 0 \end{cases}$$
これを解いて，求める a の範囲は
$$\frac{50}{27} < a < 2$$
//