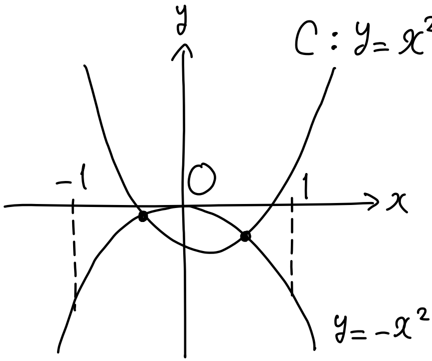
理 $\boxed{1}$

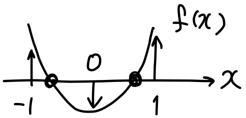


(1) 共有点についての設定から，x の2次方程式

$$x^2+ax+b=-x^2 \quad \text{つまり} \quad 2x^2+ax+b=0$$

は $-1<x<0$ と $0<x<1$ の解を1つずつもつ.

$f(x)=2x^2+ax+b$ とおくと，その条件は



$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$$

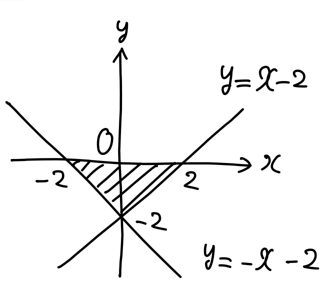
$$\therefore \begin{cases} 2-a+b>0 \\ b<0 \\ 2+a+b>0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b>a-2 \\ b<0 \\ b>-a-2 \end{cases}$$

よって点 (a, b) の

とりうる範囲は右図

(境界線は含まない)



(2) 定点 (X, Y) をとり，この点が C の通過領域に属しているための条件を考える．

次の同値関係が成り立つ．

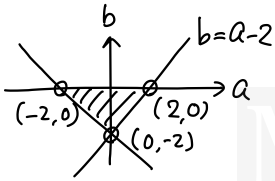
「点 $(X, Y) \in$ (C の通過領域)」

$\iff$「(1) で求めた範囲内からうまく点 (a, b) をとれば その (a, b) に対する C が点 (X, Y) を通る」

$\iff$「(1) で求めた範囲内の (a, b) のうち $Y = X^2 + aX + b$ を満たすものがとれる」

$\iff$「ab 平面で考えたとき，直線 $aX + b + X^2 - Y = 0$ が

領域 $\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$ と共有点をもつ．」



$\iff$「ab 平面で考えたとき，3点 $(2, 0), (-2, 0), (0, -2)$ がいずれも直線 $aX + b + X^2 - Y = 0$ に関して（直線上も含めて）同じ側にある」の否定

$\iff$ $f(a, b) = aX + b + X^2 - Y$ とおいたとき

「$\begin{cases} f(2, 0) \geqq 0 \\ f(-2, 0) \geqq 0 \\ f(0, -2) \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(2, 0) \leqq 0 \\ f(-2, 0) \leqq 0 \\ f(0, -2) \leqq 0 \end{cases}$」の否定

$\iff$「$\begin{cases} 2X + X^2 - Y \geqq 0 \\ -2X + X^2 - Y \geqq 0 \\ -2 + X^2 - Y \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} 2X + X^2 - Y \leqq 0 \\ -2X + X^2 - Y \leqq 0 \\ -2 + X^2 - Y \leqq 0 \end{cases}$」の否定

$\iff$「$\begin{cases} Y \leqq (X+1)^2 - 1 \\ Y \leqq (X-1)^2 - 1 \\ Y \leqq X^2 - 2 \end{cases}$ または $\begin{cases} Y \geqq (X+1)^2 - 1 \\ Y \geqq (X-1)^2 - 1 \\ Y \geqq X^2 - 2 \end{cases}$」の否定

よって，求める C の通過領域は右図（境界線は含まない）．