理 $\boxed{2}$

(1) $f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ より

$$\begin{cases} c=\alpha \\ a+b+c=\beta \\ -a+bi+c=\gamma \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c=\alpha \\ a+b=\beta-\alpha \\ -a+bi=\gamma-\alpha \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=\frac{1}{1-i}\left\{(\beta-\alpha)+i(\gamma-\alpha)\right\} \\ b=\frac{1}{1+i}\left\{(\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha)\right\} \\ c=\alpha \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta+\frac{-1+i}{2}\gamma \\ b=(-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma \quad \text{------ ①} \\ c=\alpha \end{cases}$$

//

(2) (1)の $f(0)=\alpha$, $f(1)=\beta$, $f(i)=\gamma$ をそのまま用いると，
設定より，α, β, γ は実数であり

$$1 \leqq \alpha \leqq 2,\ 1 \leqq \beta \leqq 2,\ 1 \leqq \gamma \leqq 2 \quad \text{------} ②$$

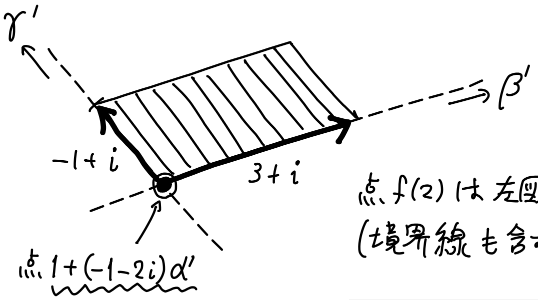
一方，

$$\begin{aligned} f(2) &= 4a+2b+c \\ &= 4\left(-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta+\frac{-1+i}{2}\gamma\right) \\ &\quad +2\left\{(-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma\right\}+\alpha \quad (①より) \\ &= (-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma \end{aligned}$$

$\alpha=1+\alpha'$, $\beta=1+\beta'$, $\gamma=1+\gamma'$ により変数 α', β', γ' を定めると
α', β', γ' の変域は $0 \leqq \alpha' \leqq 1$, $0 \leqq \beta' \leqq 1$, $0 \leqq \gamma' \leqq 1$ であり

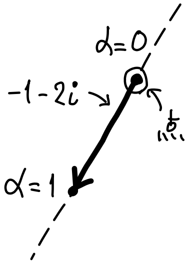
$$\begin{aligned} f(2) &= (-1-2i)(1+\alpha')+(3+i)(1+\beta')+(-1+i)(1+\gamma') \\ &= \underline{1+(-1-2i)\alpha'}+(3+i)\beta'+(-1+i)\gamma' \end{aligned}$$

ここで，一旦 α' を固定し，β', γ' のみ変化させると



点 $f(2)$ は左図の平行四辺形（境界線も含む）を描く．

一方，α' を変化させたとき



点 $\underline{1+(-1-2i)\alpha'}$ は左図の線分（両端点も含む）を描く．

よって，点 $f(2)$ のとりうる範囲は右図（境界線も含む）．