理 $\boxed{3}$

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ について,

$$f'(x)=\frac{1(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

だから, A(1, f(1)) における接線 l の式は

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ より

$y=\dfrac{1}{8}(x-1)+\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ l: y=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}\quad (=g(x))$

C と l の式を連立し, y を消去すると

$f(x)=g(x)$ より

$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$

$\therefore\ 8x=(x+1)(x^2+3)$

$\therefore\ x^3+x^2-5x+3=0$

$\therefore\ (x-1)^2(x+3)=0$

よって, C と l の共有点は $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ と点 $\left(-3, -\frac{1}{4}\right)$ であり,

A以外の共有点はただ1つである. //

その x 座標は $\underline{-3}$ //.

(2) 設定より $\alpha=-3$ であり,

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x}{x^2+3}-\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\right)\right\}^2dx$$

$$=\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x^2}{(x^2+3)^2}-\frac{1}{4}\frac{x(x+1)}{x^2+3}+\frac{1}{64}(x+1)^2\right\}dx$$

$$=\underbrace{\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x^2}{(x^2+3)^2}-\frac{1}{4}\frac{-3}{x^2+3}\right\}dx}_{=A\text{ とおく}}$$

$$+\underbrace{\int_{-3}^{1}\left\{-\frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{x^2+3}\right)+\frac{1}{64}(x+1)^2\right\}dx}_{=B\text{ とおく}}$$

ここで, Aについて,

$x=\sqrt{3}\tan\theta$, $\begin{array}{c|c} x & -3\to 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{6}\end{array}$ による置換積分より

$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ であり

$$A=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{3t^2}{(3t^2+3)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3t^2+3}\right\}\frac{\sqrt{3}}{c^2}d\theta\quad\left(\begin{array}{l}t=\tan\theta\\ c=\cos\theta\end{array}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\cos2\theta)+\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}d\theta$$

$$=\left[\frac{5\sqrt{3}}{12}\theta-\frac{\sqrt{3}}{12}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{1}{4}$$

$$B=\left[-\frac{1}{4}\left\{x+\frac{1}{2}\log(x^2+3)\right\}+\frac{1}{192}(x+1)^3\right]_{-3}^{1}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot4-\frac{1}{8}\log\frac{4}{12}+\frac{1}{192}(8+8)$$

$$=-\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log3$$

よって,

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx=\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{1}{4}-\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log3$$

$$=\underline{\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{7}{6}+\frac{1}{8}\log3}$$