理 $\boxed{4}$

(1) $KA = LB$ ---------------- ①

K, L の4で割った余りが等しいことから

$K - L = 4M$ (M：整数)

と表すことができ，これより

$K = L + 4M$.

①に代入すると

$(L + 4M)A = LB$.

$\therefore L(B - A) = 2^2 MA$

これより $L(B-A)$ は 2^2 を約数にもつが，

L は奇数であり 2 を約数にもたないことから

2^2 は $B-A$ の約数である.

よって $B-A$ は4の倍数であり，

A と B は4で割った余りが等しい. //

(2)

$$
\begin{aligned}
&{}_{4a+1}C_{4b+1}\\
&= \frac{(4a+1)!}{(4b+1)!\,(4a-4b)!}\\
&= \frac{(4a+1)\,4a\,(4a-1)(4a-2)\cdots(4b+3)(4b+2)}{(4a-4b)(4a-4b-1)(4a-4b-2)\cdots3\cdot2\cdot1}
\end{aligned}
$$

この式において

$$
\begin{aligned}
(\text{分子}) &= 4a(4a-4)(4a-8)\cdots(4b+8)(4b+4)\\
&\quad\times(4a-2)(4a-6)(4a-10)\cdots(4b+6)(4b+2)\\
&\quad\times(4a+1)(4a-1)(4a-3)\cdots(4b+5)(4b+3)\\
&= 4^{a-b}\cdot a(a-1)(a-2)\cdots(b+2)(b+1)\\
&\quad\times 2^{a-b}\cdot\underline{(2a-1)(2a-3)(2a-5)\cdots(2b+3)(2b+1)}\\
&\quad\times\underline{(4a+1)(4a-1)(4a-3)\cdots(4b+5)(4b+3)}\\
&= 2^{3(a-b)}\times a(a-1)(a-2)\cdots(b+2)(b+1)\times\underline{(\text{正の奇数})}_L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{分母}) &= (4a-4b)(4a-4b-4)(4a-4b-8)\cdots8\cdot4\\
&\quad\times(4a-4b-2)(4a-4b-6)(4a-4b-10)\cdots6\cdot2\\
&\quad\times(4a-4b-1)(4a-4b-3)(4a-4b-5)\cdots5\cdot3\cdot1\\
&= 4^{a-b}(a-b)(a-b-1)(a-b-2)\cdots2\cdot1\\
&\quad\times 2^{a-b}\underline{(2a-2b-1)(2a-2b-3)(2a-2b-5)\cdots3\cdot1}\\
&\quad\times\underline{(4a-4b-1)(4a-4b-3)(4a-4b-5)\cdots5\cdot3\cdot1}\\
&= 2^{3(a-b)}\times(a-b)(a-b-1)(a-b-2)\cdots2\cdot1\times\underline{(\text{正の奇数})}_K
\end{aligned}
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
{}_{4a+1}C_{4b+1} &= \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(b+2)(b+1)\times(\text{正の奇数})_L}{(a-b)(a-b-1)(a-b-2)\cdots2\cdot1\times(\text{正の奇数})_K}\\
&= \frac{a!}{b!\,(a-b)!}\times\frac{(\text{正の奇数})_L}{(\text{正の奇数})_K}\\
&= {}_aC_b\times\frac{(\text{正の奇数})_L}{(\text{正の奇数})_K}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \underbrace{(\text{正の奇数})}_{=K\text{とおく}}\times\underbrace{{}_{4a+1}C_{4b+1}}_{=A}=\underbrace{(\text{正の奇数})}_{=L\text{とおく}}\times\underbrace{{}_aC_b}_{=B}
$$

よって, $KA=LB$ となるような正の奇数 K, L が存在する.//

(3) (2)の議論と計算を逆に辿るとわかるように

$$K = \underline{(2a-2b-1)(2a-2b-3)(2a-2b-5)\cdots 3\cdot 1}$$
$$\times \underline{(4a-4b-1)(4a-4b-3)(4a-4b-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}$$

$$L = \underline{(2a-1)(2a-3)(2a-5)\cdots(2b+3)(2b+1)}$$
$$\times \underline{(4a+1)(4a-1)(4a-3)\cdots(4b+5)(4b+3)}$$

とすれば，$KA = LB$ が成り立つ．

このK, Lについて，

$$2a-2b-1 = 2(a-b)-1$$

設定より偶数

に注意すると，以下，合同式の法を4として

$$K \equiv \underbrace{(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdots(-1)\cdot 1}_{a-b\text{コ}} \times \underbrace{(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdots(-1)\cdot 1}_{2(a-b)\text{コ}}$$
$$\equiv (-1)^{\frac{a-b}{2}}$$

$$L \equiv \begin{cases} \underbrace{1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdots 1\cdot(-1)}_{a-b} \times \underbrace{1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdots 1\cdot(-1)}_{2(a-b)\text{コ}} & \left(\text{if } a, b\text{が偶数}\right) \\ \underbrace{(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdots(-1)\cdot 1}_{a-b\text{コ}} \times \underbrace{1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdots 1\cdot(-1)}_{2(a-b)\text{コ}} & \left(\text{if } a, b\text{が奇数}\right) \end{cases}$$
$$\equiv (-1)^{\frac{a-b}{2}}$$

だから，$K \equiv L$

これより，(1)を用いると $A \equiv B$ つまり

$${}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \pmod 4$$

であり，示せた．//

(4) $\begin{cases} 2021 = 4\cdot\underline{505}+1 \\ 37 = 4\cdot\underline{9}+1 \end{cases}$ かつ $\underline{505}-\underline{9} = 2\times 298$

だから，$a=\underline{505}$，$b=\underline{9}$ として (3)を用いることができ

$({}_{2021}C_{37}$ を4で割った余り$) = ({}_{505}C_{9}$ を4で割った余り$)$ ---②

また，$\begin{cases} 505 = 4\cdot\underline{126}+1 \\ 9 = 4\cdot\underline{2}+1 \end{cases}$ かつ $\underline{126}-\underline{2} = 2\times 62$

だから，$a=\underline{126}$，$b=\underline{2}$ として (3)を用いることができ

$({}_{505}C_{9}$ を4で割った余り$) = ({}_{126}C_{2}$ を4で割った余り$)$ ---③

さらに

$${}_{126}C_{2} = \frac{126\times 125}{2} = 63\times 125$$ だから

$${}_{126}C_{2} \equiv 63\times 125 \equiv (-1)\times 1 \equiv -1 \pmod 4$$

$\therefore ({}_{126}C_{2}$ を4で割った余り$) = 3$ ----------④

②，③，④より ${}_{2021}C_{37}$ を4で割った余りは $\underline{\underline{3}}$