理 5

設定より,

$$f(\theta)=AP^2$$
$$=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$$

(1) $f'(\theta)=2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)(-\sin\theta)$

$$=2\{\theta(1+\cos\theta)-2\sin\theta+\alpha(1+\cos\theta)\}$$
$$=2(1+\cos\theta)\left(\theta+\alpha-\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$
$$=\underbrace{2(1+\cos\theta)}_{\left(\begin{array}{c}0<\theta<\pi\\ \text{より 正}\end{array}\right)}\left\{\alpha-\underbrace{\left(\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}-\theta\right)}_{=g(\theta)\text{とおく}}\right\}$$

これより, 次の同値関係が成り立つ.

$$f'(\theta)=0 \iff g(\theta)=\alpha$$

ここで, $g(\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ について

$$g(\theta)=\frac{2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}-\theta=2\tan\frac{\theta}{2}-\theta$$

と表され,

(I) $g'(\theta)=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1=\tan^2\dfrac{\theta}{2}>0$

より $g(\theta)$は 単調増加 だから, 方程式

$g(\theta)=\alpha$ を満たす θ $(0<\theta<\pi)$は 1個以下.

(II) $g(\theta)$は $0<\theta<\pi$ において連続であり,

$g(\theta)\xrightarrow[(\theta\to+0)]{}0$, $g(\theta)\xrightarrow[(\theta\to\pi-0)]{}\infty$ であること

および αが 正の実数であることから

$g(\theta)=\alpha$ を満たす θ $(0<\theta<\pi)$は 1個以上.

(I),(II) より, $0<\theta<\pi$ の範囲に $g(\theta)=\alpha$ つまり

$f'(\theta)=0$ となる θ はただ1つ存在する. //

(2) (1)の考察から，$0<\theta<\pi$ において

$$f'(\theta)=\underbrace{2(1+\cos\theta)}_{\text{正}}\times\{\alpha-\underbrace{g(\theta)}_{\text{単調増加}}\}$$

だから，(1)で存在を示した θ の値を β とおくと

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f(\theta)$ の増減は次のとおり。

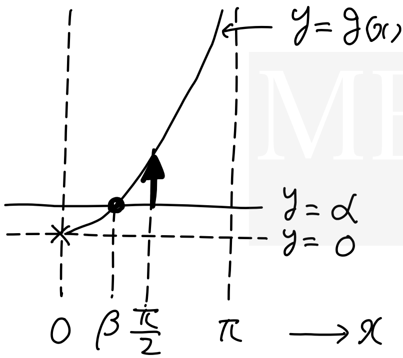
θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$		$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$f(\theta)$ が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のある点において

最大となるための条件は

「β が $\frac{\pi}{2}$ より小さいこと」

であり，これは (1)の $g(x)$ を用いて言いかえると



「$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>\alpha$」つまり「$2-\frac{\pi}{2}>\alpha$」となる。

よって，求める正の実数 α の範囲は

$$\underline{0<\alpha<2-\frac{\pi}{2}}\ //$$