理 6

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r) \quad \text{---} ①$$

(1) ①の右辺を展開すると

$$x^4-p^2x^2+q(x^2-px)+r(x^2+px)+qr$$
$$=x^4+(-p^2+q+r)x^2+p(-q+r)x+qr.$$

これより, ①の両辺を展開して係数を比べると

$$\begin{cases} x^2 \cdots & 0=-p^2+q+r & \text{---------} ② \\ x \cdots & b=p(-q+r) & \text{---------} ③ \\ 定 \cdots & c=qr & \text{----------} ④ \end{cases}$$

$p\neq 0$ だから, ②, ③ より

$$\begin{cases} q+r=p^2 \\ -q+r=\frac{b}{p} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right) \\ r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right) \end{cases}$$

(2) (1)より

$$c=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)$$
$$\therefore c=\frac{1}{4}\left(p^4-\frac{b^2}{p^2}\right)$$

これに

$$b=(a^2+1)(a+2), \quad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

を代入すると

$$-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)=\frac{1}{4}\left\{p^4-\frac{(a^2+1)^2(a+2)^2}{p^2}\right\}$$
$$\therefore p^4-\frac{(a^2+1)^2(a+2)^2}{p^2}+(4a+3)(a^2+1)=0$$
$$\therefore p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} a^2+1 & 1 & 0 & (4a+3)(a^2+1) & & -(a^2+1)^2(a+2)^2 \\ & & a^2+1 & (a^2+1)(a^2+1) & & (a^2+1)^2(a+2)^2 \\ \hline & 1 & a^2+1 & (a^2+4a+4)(a^2+1) & & 0 \end{array}$$

$$\therefore \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+\underbrace{(a^2+1)}_{f(a)}p^2+\underbrace{(a^2+4a+4)(a^2+1)}_{g(a)}\}=0$$

これより, 1例として

$$\begin{cases} f(t)=\underline{t^2+1} \\ g(t)=(t^2+4t+4)(t^2+1)=\underline{t^4+4t^3+5t^2+4t+4} \end{cases}$$

(3)　(2)のように b, c を定め

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$ を

$$x^4+bx+c$$ と表示する。

これが

$$x^4+bx+c=(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\gamma x+\delta)$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は有理数)

と因数分解できたとし、両辺を展開して x^3 の係数を比べると

$$0=\gamma+\alpha \qquad \therefore \gamma=\alpha$$

これより、この因数分解は必ず①の形で表される。

よって、①において

p, q, r が有理数となるような a

を求めればよい。

(I) $p=0$ の場合

②, ③, ④より $q+r=0$, $b=0$, $qr=c$

$b=0$ より $(a^2+1)(a-2)=0$.

a は整数だから $a=2$ に限られるが、このとき

$$c=-\left(2+\frac{3}{4}\right)(2^2+1)=-\frac{55}{4}$$ だから

$$\begin{cases} q+r=0 \\ qr=-\frac{55}{4} \end{cases}$$ より $$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{55}}{2} \\ -\frac{\sqrt{55}}{2} \end{pmatrix}$$ となり

q, r が有理数とならないので不適。

よって、この場合には適する a がない。

(Ⅱ) $p \neq 0$ の場合

a に対し，p は (2) より

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0 \quad \text{-----} ⑤$$

で定まり，さらに q，r は (1) より

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{2}\left\{p^2 - \dfrac{(a^2+1)(a+2)}{p}\right\} \\ r = \dfrac{1}{2}\left\{p^2 + \dfrac{(a^2+1)(a+2)}{p}\right\} \end{cases} \quad \text{-----} ⑥$$

で定まる．

⑥より，p が有理数ならば q，r も有理数となるから，求める条件は

「⑤で定まる p のうち有理数であるものがとれる」

ことである．

⑤において，

$$p^4+f(a)p^2+g(a) = p^4+(a^2+1)p^2+(a+2)^2(a+1)^2$$
$$> 0$$

であり，$p^4+f(a)p^2+g(a)=0$ となることはないから

$$p^2=a^2+1.$$

これと a が整数であることから p^2 は整数であり，有理数 p は整数に限る．

よって，$(p+a)(p-a)=1$ として

$$\begin{pmatrix} p+a \\ p-a \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} p \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，$a=0$．

以上より，求める a は $\underline{0}$ //