東大理系学部　入試問題

2021年

$\boxed{1}$	a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $$C:\quad y = x^2 + ax + b$$ は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。 (1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。 (2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。
$\boxed{2}$	複素数 a, b, c に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える。i を虚数単位とする。 (1) α，β，γ を複素数とする。$f(0) = \alpha$，$f(1) = \beta$，$f(i) = \gamma$ が成り立つとき，a, b, c をそれぞれ α，β，γ で表せ。 (2) $f(0), f(1), f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。
$\boxed{3}$	関数 $$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$ に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。点 A$(1, f(1))$ における C の接線を $$l:\quad y = g(x)$$ とする。 (1) C と l の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。 (2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分 $$\int_{\alpha}^{1} \left\{f(x) - g(x)\right\}^2 dx$$ を計算せよ。
$\boxed{4}$	以下の問いに答えよ。 (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。 (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。 (3) a, b は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。 (4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。
$\boxed{5}$	α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 A$(-\alpha,\ -3)$，P$(\theta + \sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。 (1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。 (2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。 $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

$\boxed{6}$ 定数 b, c, p, q, r に対し，

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p \neq 0$ であるとき，q, r を p, b で表せ。

(2) $p \neq 0$ とする。b, c が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \qquad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2 - (a^2 + 1)\right\}\left\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\right\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。