東大理系学部　入試問題

2022年

1	次の関数 $f(x)$ を考える。 $$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt\quad\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$ (1)　$f(x)$ は区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。 (2)　$f(x)$ の区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。
2	数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。 $$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n^2+1\quad(n=1,2,3,\cdots\cdots)$$ (1)　正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ。 (2)　k,n を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k,n を用いて表せ。 (3)　a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。
3	O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,y_1)$，$\mathrm{T}(x_2,y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは， $$\lvert x_1-x_2\rvert\geqq 1\quad \text{または}\quad \lvert y_1-y_2\rvert\geqq 1$$ が成り立つことと定義する。 不等式 $$0\leqq x\leqq 3,\quad 0\leqq y\leqq 3$$ が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A(3, 0)，B(3, 3) を考える。さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる。 (i)　点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y=x^2$ 上にある。 (ii) 点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている。 点 P の x 座標を a とする。 (1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。 (2)　次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。 (iii) 点 Q は領域 D の点である。 (iv) 点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている。 (3)　a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。
4	座標平面上の曲線 $$C:y=x^3-x$$ を考える。 (1)　座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。 (i)　点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。 (2)　次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。 (ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。
5	座標空間内の点 A(0, 0, 2)，B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲線を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ 　O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{X}_n$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める。

(i) X_0 は Oにある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$

  により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。
- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし，$0\leqq r\leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。