東大理系学部　入試問題

# 2023年

$\boxed{1}$

(1)　正の整数 $k$ に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2)　正の整数 $n$ に対し，

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$$

とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1)　どの赤玉も隣り合わない確率 $p$ を求めよ。

(2)　どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 $q$ を求めよ。

$\boxed{3}$

$a$ を実数とし，座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 1 の円の周を $C$ とする。

(1)　$C$ が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような $a$ の範囲を求めよ。

(2)　$a$ は (1) で求めた範囲にあるとする。$C$ のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を $S$ とする。$S$ 上の点 P に対し，点 P での $C$ の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを $L_{\mathrm{P}}$ とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる $S$ 上の相異なる 2 点 Q, R が存在するような $a$ の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

座標平面上の 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(1, 1, 1)，C(1, 2, 3) を考える。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

(2)　点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 $r$ の球面 $S$ を考える。$S$ が三角形 OHB と共有点を持つような $r$ の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

$\boxed{5}$

整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える。

(1)　$g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

(2)　$a$，$b$ を実数とし，$h(x) = x^2 + ax + b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような $a$，$b$ の組をすべて求めよ。

$\boxed{6}$　O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を $S$ とする。

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

(1)　座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 $V$ の体積を求めよ。

(i)　$\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

(ii)　線分 OP と $S$ は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

(3)　座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 $W$ の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 $\alpha$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(iii)　$\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

(iv)　線分 ON と $S$ は共有点を持たない。

(v)　線分 NP と $S$ は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。