東工大　入試問題

2020年

1	（60点） 　次の問いに答えよ． (1)　$\lvert x^2 - x - 23 \rvert$ の値が，３を法として２に合同である正の整数 x をすべて求めよ． (2)　k 個の連続した正の整数 x_1, …, x_k に対して， $$\lvert x_j^2 - x_j - 23 \rvert \quad (\ 1 \leqq j \leqq k\ )$$ の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1, …, x_k をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは， $$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$ となる列のことである．
2	（60点） 　複素数平面上の異なる３点 A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここで A，B，C は同一直線上にない仮定する． (1)　△ABC が正三角形となる必要十分条件は， $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$ であることを示せ． (2)　△ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき， $$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$$ および $$\mathrm{AP}^4 + \mathrm{BP}^4 + \mathrm{CP}^4$$ を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし２点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．
3	（60点） 　座標空間に５点 $$\mathrm{O}(0, 0, 0),\ \mathrm{A}(3, 0, 0),\ \mathrm{B}(0, 3, 0),\ \mathrm{C}(0, 0, 4),\ \mathrm{P}(0, 0, -2)$$ をとる．さらに $0 < a < 3$，$0 < b < 3$ に対して２点 $\mathrm{Q}(a, 0, 0)$ と $\mathrm{R}(0, b, 0)$ を考える． (1)　点 P，Q，R を通る平面を H とする．平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ． (2)　点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ．
4	（60点） 　n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$（ $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ ）と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を１回転させてできる回転体を V_n とする． (1)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x, \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに１回転させてできる図形の面積を x の式で表せ． (2)　(1)の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．
5	（60点） 　k を正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく． (1)　a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ． (2)　k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k a_k\}$ の極限値 A を求めよ． (3)　(2)の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $$\{k^m a_k - k^n A\}$$ が０ではない値に収束する整数 m，n（ $m > n \geqq 1$ ）を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ． (4)　(2)と(3)の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$ が０ではない値に収束する整数 p，q，r（ $p > q > r \geqq 1$ ）を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．