

2021年

1

(60点)

正の整数に関する条件

(*) 10進法で表したときに、どの位にも数字9が現れない
を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) k を正の整数とすると、 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (*) を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき、 a_k を k の式で表せ。
- (2) 正の整数 n に対して、

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n \text{ が条件 (*) を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件 (*) を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき、すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

2

(60点)

 xy 平面上の楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) a, b を実数とする。直線 $l: y = ax + b$ と楕円 E が異なる2点を共有するための a, b の条件を求めよ。
- (2) 実数 a, b, c に対して、直線 $l: y = ax + b$ と直線 $m: y = ax + c$ が、それぞれ楕円 E と異なる2点を共有しているとする。ただし、 $b > c$ とする。直線 l と楕円 E の2つの共有点のうち x 座標の小さい方を P 、大きい方を Q とする。また、直線 m と楕円 E の2つの共有点のうち x 座標の小さい方を S 、大きい方を R とする。このとき、等式

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

が成り立つための a, b, c の条件を求めよ。

- (3) 楕円 E 上の4点の組で、それらを4頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

3

(60点)

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の整数 n に対して、二項係数に関する次の等式を示せ。

$$n {}_{2n}C_n = (n+1) {}_{2n}C_{n-1}$$

また、これを用いて ${}_{2n}C_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

- (2) 正の整数 n に対して、

$$a_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

とおく。このとき、 $n \geq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ。

- (3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

東工大 入試問題

4

(60点)

S を、座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。 S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - 3(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し、定数 k を求めよ。

- (2) 点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの、 F の最大値 M を求めよ。

- (3) 点 C の座標が $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0)$ 、点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき、 $F = M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

5

(60点)

xy 平面上の円 $C : x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($a > 0$) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 円 C が $y \geq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

- (2) 円 C が $y \geq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

- (3) a が (2) の範囲にあるとする。 xy 平面において連立不等式

$$|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, \quad y \geq x^2 - x^4, \quad x^2 + (y - a)^2 \geq a^2$$

で表される領域 D を、 y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。