$\boxed{2}$

(1) 楕円 $E: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $l: y=ax+b$ の式を連立し，y を消去すると

$$\frac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1$$

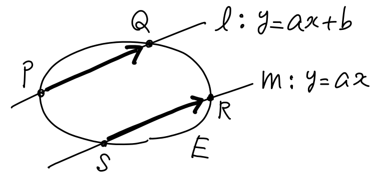
つまり $\left(\frac{1}{4}+a^2\right)x^2+2abx+b^2-1=0$ ------ ①

これより，E と l が異なる2点を共有するための条件は2次方程式 ① が異なる2つの実数解をもつことであり，(判別式) >0 として，求める a, b の条件は

$$(2ab)^2-4\left(\frac{1}{4}+a^2\right)(b^2-1)>0$$

$$\therefore \underline{4a^2-b^2+1>0}$$

(2)



$l \parallel m$ より $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR}$ だから，次の同値関係が成り立つ．

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$$

$$\Longleftrightarrow |\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{SR}|$$

$\Longleftrightarrow$ (P, Q の x 座標の差) $=$ (S, R の x 座標の差) -- ②

これより，② が成り立つための a, b, c の条件を求めればよい．

P, Q の x 座標は ① の2解であり，

$$x=\frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)}$$

だから，その差は $\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}$ である．

ただし，$4a^2-b^2+1>0$ -------------- ③

また，S, R の x 座標の差は b を c に入れかえて

$\dfrac{\sqrt{4a^2-c^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}$ となる．

ただし，$4a^2-c^2+1>0$ -------------- ④

②, ③, ④ および $b>c$ より，求める a, b, c の条件は

$$\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}=\frac{\sqrt{4a^2-c^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2} \text{ かつ } \begin{cases} ③ \\ ④ \\ b>c \end{cases}$$

$$\therefore \underline{b=-c>0 \text{ かつ } 4a^2-b^2+1>0}$$

(3) (2) の P, Q, R, R で正方形 PQRS が成立するものを求めればよい．

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ が必要だから，(2) のもとで考えればよく，このとき

$$P\left(\frac{-2ab-\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)},\ a\cdot\frac{-2ab-\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)}+b\right)$$

$$Q\left(\frac{-2ab+\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)},\ a\cdot\frac{-2ab+\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)}+b\right)$$

$$S\left(\frac{2ab-\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)},\ a\cdot\frac{2ab-\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)}-b\right)$$

$$S\left(\frac{2ab+\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)},\ a\cdot\frac{2ab+\sqrt{4a^2-b^2+1}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)}-b\right)$$

だから，

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2},\ a\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}(1,\ a)$$

$$\overrightarrow{PS}=\left(\frac{4ab}{\frac{1}{4}+a^2},\ a\cdot\frac{4ab}{\frac{1}{4}+a^2}-2b\right)$$

$$=\frac{4ab}{\frac{1}{4}+a^2}(1,\ a)-2b(0,1)$$

であり，正方形 PQRS の成立条件は

$$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PS}| \text{ かつ } \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PS}|^2 \text{ かつ } \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=0$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{4a^2-b^2+1}{\left(\frac{1}{4}+a^2\right)^2}(1+a^2)=\left(\dfrac{4ab}{\frac{1}{4}+a^2}\right)^2(1+a^2)-\dfrac{8ab^2}{\frac{1}{4}+a^2}\cdot a+4b^2\cdot 1 \quad \text{---} ⑤ \\ \dfrac{4ab}{\frac{1}{4}+a^2}(1+a^2)-2b\cdot a=0 \quad \text{----------} ⑥ \end{cases}$$

⑥ より　$ab=0$ または $2(1+a^2)-\left(\frac{1}{4}+a^2\right)=0$

$\left(a^2+\frac{7}{4}=0\right.$ となり，不成立$\left.\right)$

$b>0$ より $b \neq 0$ だから $a=0$ に限られる．

⑤ に代入すると

$$\frac{-b^2+1}{\frac{1}{16}}=4b^2 \quad \therefore b=\frac{2}{\sqrt{5}}\ (>0)$$

よって求める4点の組は

$$\underline{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)}$$

の1組．

METIS