$\boxed{3}$

(1)

$$n\,{}_{2n}C_n = n\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$
$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!}$$
$$=(n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$
$$=(n+1)\,{}_{2n}C_{n-1}\ /\!/$$

(2) $n \geqq 4$ のとき

$$a_n=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$
$$=(n+2)\cdot\frac{(2n)!}{(n+2)!\,n!}$$
$$=(n+2)\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+3)}{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$
$$=(n+2)\cdot\cancel{\frac{2n}{2n}}\cdot\underbrace{\frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{2n-2}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+3}{3}}$$

〰〰 は 1 より大きい数 $\frac{n+i}{i}$ を $i=3,4,5,\cdots,n-1$ としてかけたものだから，1 より大きい．

よって，$n \geqq 4$ のとき $a_n > n+2$ //

(3)

$a_1=\frac{{}_2C_1}{2}=1$ （素数ではない）

$a_2=\frac{{}_4C_2}{3}=2$ （素数）

$a_3=\frac{{}_6C_3}{4}=5$ （素数）

以下，$n\geqq4$ とし，$a_n=p$（素数）とおく．

(2)より $p>n+2$ ------------------------ ①

また，$p=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$ より

$$\therefore p=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$
$$=\frac{2n\cdot(2n-1)!}{n!\cdot(n+1)!}$$
$$=\frac{2}{(n-1)!}(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2) \text{ ---------- ②}$$

$$\therefore (n-1)!\times p = 2\times(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)$$

これと，p が ① を満たす素数であることから

p は $2n-1,\ 2n-2,\ \cdots,\ n+3$ のいずれかである．

これより $p \leqq 2n-1$ であり，② より

$$\frac{2}{(n-1)!}\cancel{(2n-1)}(2n-2)\cdots(n+2)\leqq\cancel{2n-1}$$
$$\therefore \frac{2}{(n-1)!}(2n-2)(2n-3)\cdots(n+2)\leqq1$$
$$\therefore \frac{2}{2}\times\frac{2n-2}{n-1}\cdot\frac{2n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{3}\leqq1$$
$$\therefore \frac{2n-2}{n-1}\cdot\frac{2n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{3}\leqq1 \text{ ------------ ③}$$

ところが，左辺は 1 より大きい数 $\frac{n-1+i}{i}$ を $i=3,4,\cdots,n-1$ としてかけたものであり，1 より大きいから ③ は成り立たない．

よって，$n\geqq4$ の n はすべて不適．

以上より，求める n は $2,\ 3$ //