$\boxed{4}$

(1) $F = 2\left(|\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2\right)$

$\quad -3\left(|\vec{d}-\vec{a}|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2\right)$

$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\quad -9|\vec{d}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{d}+6\vec{b}\cdot\vec{d}+6\vec{c}\cdot\vec{d}$

$= -6-4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{d}+6\vec{b}\cdot\vec{d}+6\vec{c}\cdot\vec{d}$

($|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$: Sの半径 より)

一方,

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$

$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\quad -3\vec{a}\cdot\vec{d}-3\vec{b}\cdot\vec{d}-3\vec{c}\cdot\vec{d}$

$= 3+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}-3\vec{a}\cdot\vec{d}-3\vec{b}\cdot\vec{d}-3\vec{c}\cdot\vec{d}$

よって,

$F = -2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$

と書けて, $\underline{k=-2}$ //

(2) $\triangle$ABCの重心をGとおき, $\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ と表示すると,

$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であり, (1)より

$F = -2\cdot 3\vec{g}\cdot(3\vec{g}-3\vec{d})$

$\quad = 18(\vec{g}\cdot\vec{d}-|\vec{g}|^2)$

一旦 $\vec{g}$ を固定 (つまり A, B, C を固定) し, $\vec{d}$ のみを動かす (つまり D のみを動かす) ことを考え, 変数 θ を

$\theta = (\vec{g}$ と $\vec{d}$ となす角$)$

で定めると, θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を自由に変化し,

$F = 18\left(|\vec{g}|\cdot 1\cdot\cos\theta-|\vec{g}|^2\right)$

は $\theta=0$ のとき最大値

$F = 18\left(|\vec{g}|-|\vec{g}|^2\right)$

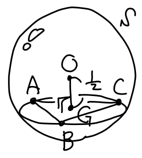
をとる.

さらにこの値は

$F = -18\left(|\vec{g}|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2} \leqq \frac{9}{2}$

を満たす.

等号成立の条件は $|\vec{g}|=\frac{1}{2}$ であり, これは例えば



左図のような場合などで達成可能である.

よって, Fの最大値は $\underline{M=\frac{9}{2}}$ //

(3) (2)より, $F=M$ となるための条件は

$\theta=0$ かつ $|\vec{g}|=\frac{1}{2}$

つまり,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \text{ と } \vec{d} \text{ のなす角}\right)=0 & \text{-------- ①} \\ \frac{1}{3}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\frac{1}{2} & \text{---------------- ②} \end{cases}$$

である.

A(k, l, m), B(p, q, r) とおく.

A, B $\in S$ より $\begin{cases} k^2+l^2+m^2=1 & \text{-------- ③} \\ p^2+q^2+r^2=1 & \text{-------- ④} \end{cases}$

C$\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$ と併せて

$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\left(k+p-\frac{1}{4},\ l+q+\frac{\sqrt{15}}{4},\ m+r\right)$

であり, ① と D$(1, 0, 0)$ より

$$\begin{cases} k+p-\frac{1}{4}>0 \\ l+q+\frac{\sqrt{15}}{4}=0 \\ m+r=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p>-k+\frac{1}{4} \\ q=-l-\frac{\sqrt{15}}{4} & \text{---- ⑤} \\ r=-m & \text{------ ⑥} \end{cases}$$

このとき, $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}(\underbrace{k+p-\tfrac{1}{4}}_{\text{正}}, 0, 0)$ より

$\frac{1}{3}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\frac{1}{3}\left(k+p-\frac{1}{4}\right)$ であり,

② より $\frac{1}{3}\left(k+p-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ $\therefore p=-k+\frac{7}{4}$ --- ⑦

⑤, ⑥, ⑦ を ④に代入して

$\left(-k+\frac{7}{4}\right)^2+\left(-l-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2+(-m)^2=1$

$\therefore k^2+l^2+m^2-\frac{7}{2}k+\frac{\sqrt{15}}{2}l+4=1$

③を代入して

$1-\frac{7}{2}k+\frac{\sqrt{15}}{2}l+4=1$

$\therefore k=\frac{\sqrt{15}}{7}l+\frac{8}{7}$ -------------------- ⑧

③に代入して

$\left(\frac{\sqrt{15}}{7}l+\frac{8}{7}\right)^2+l^2+m^2=1$

$\therefore \frac{64}{49}l^2+\frac{16\sqrt{15}}{49}l+\frac{15}{49}+m^2=0$

$\therefore \frac{1}{49}(8l+\sqrt{15})^2+m^2=0$

$\therefore l=-\frac{\sqrt{15}}{8},\ m=0$

⑧, ⑦, ⑤, ⑥に代入して, $k=\frac{7}{8}$, $p=\frac{7}{8}$, $q=-\frac{\sqrt{15}}{8}$, $r=0$.

よって, $\underline{\text{A}\left(\frac{7}{8}, -\frac{\sqrt{15}}{8}, 0\right),\ \text{B}\left(\frac{7}{8}, -\frac{\sqrt{15}}{8}, 0\right)}$ //